SCHOEN,


OPTIK.





Math.a. 20
86
w

BEITRÄGE

ZUR

DIOPTRIK DES AUGES

VON

DR. WILHELM SCHOEN.

MIT 11 LITHOGRAPHIRTEN, 1 PHOTOTYPIRTEN TAFEL UND 23 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1884.

8/1284

30/

Math. A. 2° 86 no Schoen

BEITRÄGE

ZUR

DIOPTRIK DES AUGES

VON

DR. WILHELM SCHOEN.

MIT 11 LITHOGRAPHIRTEN, 1 PHOTOTYPIRTEN TAFEL UND 23 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1884.

HERRN CARL LUDWIG

IN VEREHRUNG

GEWIDMET.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Inhalt.

		Seite
Einleitung		1
A. Die sphärische Aberration		4
1. Sphärische Fläche	Taf. I Fig. 1	4
2. Der Gang schief einfallender Strahlen in Linsen		7
3. Kugellinse	Taf. I Fig. 2	9
4. Die planconvexe Linse	Taf. II Fig. 2	9
5. Die symmetrische Biconvexlinse	Taf. III Fig. 1	11
6. Ideal-homogene Schweins-, Rinds- und Menschenlinse	Taf. IV Fig. 1	12
7.	Taf. V Fig. 1	12
8.	Taf. VI Fig. 1	12
9. Brennlinien, Brennfigur, Brenngebilde I	Taf. VI Fig. 2—8	17
B. Mathematische Ableitung der Brechungsgesetze		22
10. Das Malus-Dupin'sche Gesetz		22
11. Die Krümmung der Flächen, Krümmungsradien		30
12. Brenngebilde II	Taf. XI Fig. 1—6	35
13. Berechnung		41
C. Die Aberration an Flächen mit abnehmender Krümmung		52
14. Fläche eines Rotationsellipsoids	Taf. II Fig. 1	52
15. Die optischen Eigenschaften der Rotationskörper zweiten Grades		55
16. Aplanatische Linien und Flächen	Taf. X Fig. 1. Taf. XII Fig. 1	58
D. Die Aberration an Flächen und in Linsen bei sich änderndem Brechungsindex		69
17. Die sphärische Fläche bei abnehmendem Index		69
18. Die geschichtete Linse	Taf. IX Fig. 1	69
19. Experimentelle Untersuchung an thierischen Linsen	Taf. VII. VIII. IX	74
E. Die Lage der Brenngebilde im menschlichen Auge		96
20. Die Brenngebilde im ruhenden Auge	Taf. X Fig. 2. Taf. XII Fig. 2	97
21. Die Brenngebilde im accommodirten Auge	Taf. X Fig. 3	102
22. Terminantes conjugatae und Spatium conjugatum	Taf. X Fig. 4	104
23. Experimentelle Untersuchung des Brenngebildes im menschlichen Auge		106
24. Die Bedeutung des Spatium conjugatum für das Sehen mit einem und mit beiden Augen		108
Litteratur		111
Inhalt der Tafeln		113
Erläuterung zu Tafel XI		114

Seit den dioptrischen Untersuchungen von Gauss, in denen zum ersten Male für den Gang der Lichtstrahlen in centrirten Systemen Formeln aufgestellt wurden, welche die Dicke der Linsen nicht mehr vernachlässigten, ist eine grosse sich auf die Gauss'schen Sätze stützende, zum Theil dieselben in elementarster Weise wiedergebende Literatur entstanden.

Gauss behielt die Beschränkung auf solche Strahlen bei, die gegen die Axe unendlich wenig geneigt sind, setzte somit die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei Seite. Der Bereich, über welchen sich die zu einem homocentrischen System gehörigen Lichtstrahlen auf jeder der brechenden Flächen ausbreiten, darf nicht grösser sein, als dass er als eben und zwar auf der gemeinschaftlichen Axe senkrecht stehend betrachtet werden kann. Dies ist der Fall, wenn sowohl die nach den Punkten, in denen die Brechung stattfindet, gezogenen Radien der brechenden Fläche als auch die Strahlen selbst mit der Axe Winkel bilden, für welche Sinus, Tangente und Bogenzahl als gleich angesehen werden können.[1]) Der Winkel zwischen dem äussersten Radius und der Axe ist der halbe Oeffnungswinkel der Fläche, derjenige zwischen dem äussersten Strahl und der Axe der halbe Oeffnungswinkel des Strahlenbündels. Nennen wir den ersten α, den zweiten ω, so muss also sein

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\alpha}{360^0}\,2\pi \text{ und}$$

$$\sin\omega = \operatorname{tg}\omega = \frac{\omega}{360^0}\,2\pi.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von Sinus, Tangente und Arcus kleiner Winkel zusammengestellt.

Winkel	Sinus	Tangente	Arcus $\frac{\alpha^0}{360^0}\cdot 2\pi$
30′	0·0087265	0·0087268	0·0087266
1⁰	0·0174524	0·0174551	0·0174532
1⁰ 30′	0·0261769	0·0261859	0·0261799
2⁰	0·0348995	0·0349207	0·0349065
2⁰ 30′	0·0436190	0·043661	0·043633
3⁰	0·0523360	0·052408	0·0523559

Bis zu 3⁰ stimmen die Werthe von Sinus, Tangente und Bogenzahl noch auf 3 Decimalstellen überein. Das Interesse der instrumentellen Optik erstreckt sich nur auf solche paraxiale Strahlen; sie

[1]) Wenn wir unter φ die Länge des Kreisbogens vom Radius 1 eines Winkels verstehen, so gelten folgende Formeln:

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - $$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1\cdot2} + \frac{\varphi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - .$$

Ist der Winkel φ so klein, dass die zweiten und höheren Potenzen vernachlässigt werden können, dann erhält man:

$$\sin\varphi = \varphi$$
$$\cos\varphi = 1$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \varphi.$$

giebt ihren Flächen in der Regel keinen über 5° hinausgehenden Oeffnungswinkel. Bei dieser Beschränkung verliert für sie die sphärische Aberration der chromatischen gegenüber wesentliche Bedeutung.

Die Natur benutzt bei den thierischen Augen Flächen, welche bedeutend grössere Abschnitte der Oberfläche des Rotationskörpers ausmachen. Der Flächenöffnungswinkel der menschlichen Hornhaut beträgt über 100 Grad. Für das centrale Sehen kommen davon allerdings nur 40 bis 50 in Betracht, da das Irisdiaphragma die übrigen Strahlen abblendet und 20 bis 30 Grade des Randes ausschliesslich dem peripheren Sehen dienen; doch ist klar, dass hier die sphärische Aberration eine weit grössere Bedeutung haben muss, als bei den optischen Instrumenten. Die oben genannten Vernachlässigungen dürfen nicht mehr stattfinden. Noch in einem anderen Punkte weicht das Interesse der physiologischen Optik von dem der instrumentellen ab. Die letztere hat sich nur mit solchen Strahlenbündeln zu beschäftigen, deren Axenstrahl einen sehr kleinen Winkel mit der Axe bildet, die die Centren der brechenden Medien enthält.

Herschel sagt z. B.: Der Unterschied zwischen der Aberration eines Objektivglases im Centrum des Gesichtsfeldes und ausserhalb desselben ist so gering bei den gebräuchlichen Ferngläsern, dass er, so weit meine Erfahrung reicht, der Aufmerksamkeit der besten praktischen Optiker entgangen ist.[1]) Natürlicher Weise haben dieselben daher auch keine Ursache gehabt den Versuch zur Beseitigung einer Quelle von Undeutlichkeit zu machen, welche nicht erheblich genug war, um störend zu werden.

Ganz andere Wichtigkeit hat dieser Punkt für die Beurtheilung der Brechung im thierischen und menschlichen Auge, wo noch Bündel verwendet werden, welche unter einem Winkel von 90° mit der Axe auf die Hornhaut und unter einem solchen von 75° auf die Linsenflächen fallen. Derartige Unterschiede können nicht unbeachtet bleiben.

Das Ziel, welches die Natur, vom Zweckmässigkeitsgesichtspunkte aus betrachtet, erstrebte, indem sie die brechenden Flächen mit grossem Oeffnungswinkel anwandte, liegt zu Tage. Es war nothwendig dem Auge ein grosses Gesichtsfeld zu schaffen. Hierin macht sich ein Umstand geltend, welcher bei optischen Instrumenten keine oder doch nur nebensächliche Berücksichtigung geniesst. Andererseits durfte die Schärfe der centralen Bilder nicht durch die zur Schaffung des grossen Gesichtsfeldes nöthigen Einrichtungen leiden, welche Rücksicht wieder besondere Massregeln bedingte. Endlich kommt noch hinzu die dem Auge eigenthümliche Fähigkeit des Akkommodirens, welche von massgebender Bedeutung für dasselbe ist.

Wenn nun jedenfalls einerseits dafür zu sorgen war, dass durch die für das periphere Sehen getroffenen Einrichtungen das centrale weder für die Nahe- noch für die Fern-Stellung beeinträchtigt wurde, so hat andererseits wiederum das periphere Sehen der Akkommodation gegenüber ein von dem des centralen weit abweichendes und zwar wesentlich negatives Interesse. Diese Punkte verlangen immer gleichzeitige Erwägung, wenn wir uns von der Zweckmässigkeit einer speciellen Einrichtung Rechenschaft geben wollen. Daher hat es grosse Schwierigkeiten, Zweckmässigkeitsgesichtspunkte a priori aufstellen zu wollen. Gewissermassen als selbstverständlich setzte man beim Auge Periscopie voraus, weil mit dem Begriff der homocentrischen Brechung von den optischen Instrumenten her derjenige möglichster Vortrefflichkeit verknüpft ist. Man suchte die Periscopie des Auges nachzuweisen und glaubte es auch zu können, ohne sich die Frage vorgelegt zu haben, ob denn die an optischen Instrumenten gewonnenen Vorstellungen von Vorzüglichkeit ohne Weiteres auf das Auge Anwendung finden dürfen und ob Periscopie mit Rücksicht auf die physiologischen Zwecke des Auges auch wirklich zweckmässig sein würde. Die vorausgehenden Betrachtungen zeigen aber, dass die an das Auge gestellten Anforderungen wesentlich von denen abweichen, welchen optische Instrumente zu genügen haben. Wir behalten uns die Erörterung der Zweckmässigkeit für den Schluss vor.

[1]) Herschel (On the aberration of compound lenses and object-glasses. Philos. trans. 1821. LXI. S. 226): „The difference of the aberrations of an object-glass in and out of the centre of the field is so small in ordinary telescopes, as to have escaped (so far as my enquiries have gone,) the notice of the best practical opticians; nor, of course has any part of their attention been directed to obviate experimentally a source of indistinctness, they could not perceive to exist.“

Im thierischen Auge finden sich nicht sphärische Flächen und geschichtete Linsen vor, zwei Einrichtungen, welche geeignet sind, die Schärfe der centralen Bilder trotz der grossen Oeffnungswinkel zu wahren, und welche diesen Zweck auch im Auge zu haben scheinen.

Parabolische Spiegel vielleicht ausgenommen, verwendet die praktische Optik nur kugelige Flächen, während wir in der Hornhaut, möglicherweise auch in den Linsenflächen des thierischen Auges nicht sphärische Rotationsflächen vor uns haben. Endlich kommen geschichtete Linsen, wie sie die thierischen Krystalllinsen darstellen, in der instrumentellen Optik nicht zur Anwendung.

Soweit das Interesse der praktischen Dioptrik reicht, hat sich, wie oben schon bemerkt, auch die theoretische zu einer ausserordentlichen Höhe der Entwicklung aufgeschwungen. Die Brechung paraxialer Strahlen in centrirten Systemen sphärischer Flächen hat die sorgfältigste Durcharbeitung erfahren.

In dem darüber hinaus liegenden Gebiete, was eben — bis jetzt wenigstens — einzig für die Dioptrik des thierischen Auges von Bedeutung ist, welches die Brechung schräg auffallender Bündel in sphärischen und nicht sphärischen Flächen und auch die Brechung paraxialer in nicht sphärischen Rotationsflächen umfasst, kann man die mathematische Optik zwar auch als abgeschlossen ansehen, indessen vermissen wir auf diesem Gebiete einen Gauss, welcher die Schätze der Mathematik dem Praktiker in ähnlicher Weise, wenn dies möglich wäre, wie bei den paraxialen Strahlen, verwendbar gemacht hätte. Dieses Gebiet ist an und für sich schon ein schwieriges, weil die Bedingungen viel complicirter sind, ausserdem ist aber die Vernachlässigung der Abweichungen, welche der Gauss'schen Dioptrik paraxialer Strahlen in centrirten Systemen eine solche Glätte und Schönheit verleiht, hier der Natur der Sache nach nicht zulässig.

Es ist möglich die Gauss'schen Punkte auch auf schräge Strahlenbündel zu übertragen, doch müssen sie für jedes Strahlenbündel berechnet werden. Der Vortheil derselben für die paraxialen Strahlen liegt aber eben darin, dass die einmal ermittelten Punkte durchweg verwendbar sind, soweit die erwähnten Vernachlässigungen stattfinden dürfen. Dem allgemeineren Verständniss stellen sich daher hier grosse Schwierigkeiten entgegen.

Es soll im Nachfolgenden, stets anknüpfend an die auf den Tafeln genau dargestellten Specialfälle, zuerst die sphärische Aberration für paraxiale, dann für schiefe Bündel an einer sphärischen Fläche untersucht werden. Darauf wird die Gestaltung der Aberration in homogenen Linsen ebenfalls für paraxiale und schiefe Bündel abgehandelt. Es folgt die Abweichung nach der Fläche an nicht sphärischen Rotationsflächen, die Brechung in der geschichteten Linse und endlich werden aus Allem die Ergebnisse für die Dioptrik des thierischen Auges zusammengestellt. Auf die Brechung paraxialer Strahlen im Auge, als genügend und ausgiebig andererseits behandelt, wird nur, so weit es nöthig ist, Rücksicht genommen.

Einzelne unendlich dünne Bündel herauszugreifen und ihre Brechung zu verfolgen, genügt, wie sich ergeben wird, nicht. Es ist nöthig, ein Bild von dem Brechungsresultat des ganzen auffallenden Bündels zu entwerfen und zwar von der allgemeinen Gestalt desselben, sowie von den eigenthümlichen Formen, welche bei verschieden gekrümmten Flächen und verschieden gestalteten Linsen zur Erscheinung kommen. Die Gesammtheit aller Schnittpunkte der gebrochenen Strahlen soll in Zukunft Brenngebilde heissen. Der erste Theil wird die Brenngebilde sphärischer Flächen und durch solche begrenzter homogener Linsen für paraxiale und schräge Bündel vorführen. Die mathematische Ableitung der allgemeinen Form des Brenngebildes ist in einen besonderen Abschnitt am Ende des ersten Theiles verwiesen worden.

A. Die sphärische Aberration.

1. Sphärische Fläche.

Fällt auf eine Halbkugelfläche, welche zwei verschiedene Medien von einander trennt, ein Bündel paralleler Strahlen, so gelangen nur die senkrecht zur Fläche, also die am Scheitel derselben eintretenden Strahlen in einem Punkte, dem Haupt-Brennpunkte der Fläche, zur Vereinigung, die übrigen kreuzen die Axe schon näher der Fläche, sie aberriren.

Zur Erläuterung dient die Figur 1 Taf. I. C ist der Mittelpunkt einer Kugelfläche mit dem Radius $r = 10$ cm, A sei der Scheitel, auf der Seite C befinde sich das dichtere Medium, es sei das Verhältniss der Brechungsindices $n = 1 \cdot 5$. Dann liegt der centrale Brennpunkt in 30 cm Entfernung bei F. Auf die convexe Seite der Fläche falle ein Bündel unter einander und mit der Axe paralleler Strahlen. Von sieben Strahlen ist der Verlauf nach der Brechung gezeichnet.[1]

Diese Strahlen schneiden die Axe ACF in den Punkten a_1 bis a_7 und sich unter einander in den Punkten i_1 bis i_6. Die Gesammtheit der Schnittpunkte ii ist die kaustische Linie. Die Punkte a_1 bis a_7 wollen wir Aberrationspunkte nennen, die Entfernung derselben vom Hauptbrennpunkte: Längenaberration. Das Besprochene wird als sphärische Aberration bezeichnet. Die Einzelheiten dieses Vorganges müssen wir näher betrachten.

Es möge jeder der Strahlen, z. B. der bei B eintretende, nicht einen einzelnen Strahl sondern ein unendlich dünnes Bündel von quadratischem oder kreisförmigem Querschnitte darstellen. In der unteren Hälfte der Figur ist ein solches Bündel mit dem Querschnitt T vergrössert gezeichnet. Das Bündel hat die Form eines vierseitigen Prismas. Die Strahlen M_1M und N_1N liegen in der Ebene des Papiers, O_1O und P_1P vor derselben. Das Stück der Kugeloberfläche MNOP liegt vor der Ebene des Papiers, welche es in MN schneidet. Nach der Brechung verwandelt sich das vierseitige Prisma zunächst in ein dreiseitiges, dessen brechende Kante QS senkrecht zur Ebene des Papiers steht (Prisma I). Die Form, welche von da an das gebrochene Bündel besitzt, versteht man am leichtesten, wenn man eine Theilung in einen vorderen und einen hinteren Abschnitt vornimmt. Beide stellen dreiseitige Prismen dar mit der Grenzfläche U als gemeinsame Basis. Die brechende Kante des vorderen Prismas ist QS, fällt also mit der des I. Prismas zusammen und steht vertikal zur Ebene des Papiers. Die brechende Kante des letzten oder III. Prismas ist $a_7 a_6$; sie liegt in der Ebene des Papiers.

Wir beschränken uns hier nur auf die Darlegung des Thatsächlichen, die mathematische Entwicklung ist einem anderen Abschnitte vorbehalten.

Die Strahlen jedes einzelnen Bündels werden in horizontaler Richtung stärker, schwächer in der vertikalen gebrochen. Die in M und N eintretenden Strahlen kommen schon in S zur Vereinigung, während die Strahlen PQ und NS sich erst in a_7 schneiden. Es handelt sich somit um eine astigmatische Brechung jedes einzelnen Bündels; wir wollen dieselbe im Gegensatz zu der oben besprochenen eigentlichen Aberration mit dem Worte Astigmasie bezeichnen, wobei aber nicht vergessen werden soll, dass damit nur eine Theilerscheinung desselben Vorganges gemeint ist.

Das Gleiche wiederholt sich nun an den in DGHIKL eintretenden dünnen Bündeln, wie auch an allen dazwischen zu denkenden. Für die sechs eben erwähnten Bündel ist die Lage der ersten Brennlinien, welche QS entsprechen und senkrecht zur Ebene des Papiers stehen, sowie diejenigen der zweiten,

[1]) Die Einfalls- und Brechungswinkel, sowie die übrigen Zahlen sind in der zugehörigen Tabelle aufgeführt.

welche a_7 a_6 entsprechen, berechnet worden. Die zweiten Brennlinien fallen mit der Axe zusammen, die ersten liegen in b_7 bis b_1 und sind als in diesen Punkten zur Ebene des Papiers errichtete Senkrechten zu denken. In den Punkten i_6 bis i_1 würden die Brennlinien der in der Mitte zwischen B und D, G und H, u. s. w. verlaufenden Bündel senkrecht zur Ebene des Papiers stehen. Die kaustische Linie wird somit von den ersten Brennlinien gebildet, während die zweiten einen Theil der Axe decken. Diese von den zweiten Brennlinien gebildete Lichtlinie bezeichne ich als die Innere Caustica, jene durch die ersten Brennlinien gebildete eigentliche kaustische Linie als die Aeussere Caustica. Fasst man die ganze Brechung, nicht blos die in einem Meridian ins Auge, so hat man die Figur sich um die Axe gedreht zu denken und es verwandelt sich die äussere kaustische Linie in einen kaustischen Mantel von der Form eines Zeltes, dessen Spitze sich im Brennpunkte F befindet. Die zweiten Brennlinien bilden die Zeltstange. Fängt man die Brennfigur auf einem Schirm auf, so erhält man einen hellen centralen Punkt, herrührend von den zweiten Brennlinien der Caustica interna, und einen hellen äusseren Saum, welcher den ersten Brennlinien der Caustica externa entspricht. Für jedes unendlich dünne Bündel können die beiden Brennlinien als Gerade betrachtet werden, deren Richtungen senkrecht zu einander und zu der Axe des Bündels stehen, und zwar steht die erste Brennlinie senkrecht zur Einfallsebene, die zweite liegt in derselben. Einfallsebene ist diejenige Ebene, welche gelegt gedacht ist durch die Axe des eintretenden und gebrochenen Bündels. Die Strecke zwischen beiden Brennlinien heisst Brennstrecke, sobald der Leuchtpunkt im Unendlichen liegt; für einen endlich entfernten Leuchtpunkt treten an die Stelle dieser Bezeichnungen öfter diejenigen von Bildlinien und Bildstrecke; doch werden wir Brennlinie und Brennstrecke als die allgemeinen umfassenden Ausdrücke für unendliche und endliche Entfernungen gebrauchen. Die Caustica interna ist zusammengesetzt aus den zweiten Brennlinien, — welche wir auch die liegenden nennen können, weil sie in der Einfallsebene liegen, — die Caustica externa aus den ersten oder stehenden.

Die Caustica externa ist die eigentliche sogenannte Caustica, diejenige Linie, welche aus den Durchschnittspunkten sämmtlicher in einem Meridian gebrochenen Strahlen zusammengesetzt ist.

Man kann somit sich mittelst einer Anzahl berechneter erster Brennlinien die äussere Caustica construiren. Dieses Verfahren hat den Vortheil vor dem von Engel und Schellbach in ihrem Atlas eingeschlagenen, dass nicht eine schwer übersichtliche Menge von Strahlen gezogen werden muss. Sobald man sich nicht auf paraxiale Strahlen beschränkt, kann man auch nicht der zweiten Brennlinien entbehren, weil durch dieselben die Lage der Caustica interna gefunden wird, die dann nicht mehr wie bei der Axe parallelen Strahlen dadurch bestimmt ist, dass sie mit der Axe zusammenfällt.

Die Markirung der Brennlinien erleichtert auch die Vorstellung des Brenngebildes im Raume in den Fällen, wo sich dasselbe nicht mehr als Rotationskörper auffassen lässt. Aus diesen Gründen ist die Darstellung der Caustiken mittelst der Brennlinien gewählt worden.

Sobald es sich um die Gesammt-Gruppirung der Brennlinien in der Ebene handelt, werden wir den Ausdruck Brennfigur brauchen, die räumliche Anordnung aber Brenngebilde nennen.

Mathematisch betrachtet ist die Caustica externa die Evolute einer bestimmten anderen Linie, die wir Caustica secundaria nennen wollen. Im Falle der Figur ist die Caustica secundaria eine der Ellipse ähnliche Curve.

Hat man zwei derartige Curven, dass alle Normalen auf der einen Tangenten an der anderen sind, so bezeichnet man die erste Linie als die Evolvente, die zweite als die Evolute. Die Evolute ist, wie leicht ersichtlich, der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Evolvente. Ist die Evolvente ein Kreis, so ist die Evolute das Centrum desselben.

In Fig. 1 Taf. I stehen die Strahlen Ba_7 Da_6 u. s. w. senkrecht zu der Caustica secundaria und sind Tangenten an der Caustica externa $F b_1 i_1 \dots i_6 b_7$. Die Punkte i_1 i_2 bis i_6 sind die Krümmungsmittelpunkte des zwischen je zwei Strahlen gelegenen Stückes der Caustica secundaria. Jede Evolute hat eine unendliche Anzahl Evolventen, da jede parallel z. B. der Caustica secundaria gezogene Linie dieselben Normalen hat und der Bedingung genügt.

Man construirt also die Caustica secundaria in folgender Weise. Man beschreibt um F mit beliebigem Radius, z. B. F C, das Bogenstück bis zum ersten Strahl, um i_1 das Stück bis zum zweiten, um i_2 bis zum dritten und so fort, indem man den Zirkel jedesmal dort einsetzt, wo das vorhergehende Bogenstück endigt. Oder man befestigt einen Faden von beliebiger Länge, etwa = F C, in F, stösst in den Punkten i_1 bis i_6 Stecknadeln ein und beschreibt so die Linie C. s. Das beschreibende Stück des Fadens wird dabei durch die hemmenden Nadeln immer mehr verkürzt.

Die Aberration, wie wir sie oben hinsichtlich einer brechenden Fläche besprochen haben, findet sich in gleicher Weise, wenn es sich um Linsen handelt, solange wir Bündel betrachten, deren Axe mit der Linsenaxe zusammenfällt. Für schräge Bündel ändert sich dagegen das Bild wesentlich, wenn die brechenden Oberflächen, welche zur Wirkung kommen, eine beschränkte Ausdehnung haben und nur einem kleineren Theil der Kugeloberfläche entsprechen, wie dies für Linsen, die Kugellinse ausgenommen, zutrifft. Es giebt dann keine Strahlen mehr, welche zu beiden brechenden Flächen senkrecht stehen und stigmatisch gebrochen werden. Zur Herstellung des Bildes können nur astigmatische Randstrahlen benutzt werden.

Betrachten wir C B Fig. 1 Taf. I als Axe, die brechende Fläche dehne sich von B bis I aus, es falle auf dieselbe ein Bündel, unter sich und φ A, paralleler Strahlen, die bei B. D. G. H. eintreten. Sie bilden einen Winkel mit der Axe B C = 70°. Dann hätten wir die Brenn-Strecken und Linien $b_4\,a_4$ bis $b_7\,a_7$ zur Verfügung, der günstigste Bildpunkt würde hier unstreitig in der Gegend von i_5 liegen.

Dies gilt, solange wir eine einzelne Fläche vor uns haben, nur vom praktischen Gesichtspunkte aus, mathematisch kann man sich die eine Fläche bis zur Eintrittsstelle des Normalstrahles ausgedehnt denken. Bei allen Linsen, die Kugelform allein ausgenommen, und auch bei den Oberflächen der thierischen Augen ist die Beschränkung der brechenden Fläche vorhanden, so dass bei schief einfallenden Strahlenbündeln nur Randstrahlen benutzt werden können, die sämmtlich ausser der Aberration eine bedeutende Astigmasie zeigen. Wir untersuchen zunächst die Aberrationserscheinungen an Linsen mit sphärischen Flächen für senkrechte und schräge Bündel.

Tabelle I.

Sphärische Fläche und Kugel ($r = 10.\ n = 1 \cdot 5$).

Schiefe Bündel.												Paraxiale Bündel.				
				Vorderfläche.			Hinterfläche.			Caustica secundaria.[1])			I. Fläche.		II. Fläche.	
λ	ψ	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.	ϱ_1	ϱ_2	φ	ψ	l[2])		· l
70	38° 47	0·827	15·59	18·14	11·02	7·12	1·491	— 1·167	2·658	11·58	5·61	0	0	20	Brechungswinkel dieselben, nur umgekehrt.	15
60	35° 16	0·726	16·346	20·66	13·8	6·86	2·379	— 0·7788	3·168	10	6·664	10	6° 38	19·67		14·81
50	30° 43	0·648	17·206	23·15	17·53	5·62	3·153	0·125	3·028	8·58	7·61	20	13° 9	19·07		14·44
40	25° 22	0·587	18·036	25·55	20·78	4·77	3·871	1·166	2·705	7·34	8·44	30	19° 26	18·14		13·87
30	19° 26	0·549	18·86	27·32	24·3	3·02	4·307	2·499	1·808	6·34	9·1	40	25° 22	16·96		13·15
20	13° 9	0·521	19·476	28·79	27·3	1·49	4·531	3·775	0·756	5·603	9·6	50	30° 43	15·46		12·29
10	6° 38	0·505	19·866	29·7	29·31	0·39	4·929	4·681	0·248	5·152	9·9	60	35° 16	13·8		11·39
0		0·5	20	30	30	0	5	5	0	5	10	70	38° 47	12·08		10·6

[1]) $\varrho_1 + \varrho_2\, n = z = 20$.

[2]) l Entfernung der Aberrations- resp. Brennpunkte auf dem Axenstrahl vom Krümmungsmittelpunkt der Fläche.

2. Der Gang schief einfallender Strahlen in Linsen.

Oben ist schon vorausgeschickt worden, dass bei der Betrachtung der Brechung schiefer Bündel in Linsen es keineswegs zur Beurtheilung des Brechungsresultates genügt, einen Strahl zu berechnen, z. B. den Centralstrahl, wie dies bis jetzt die Autoren meistens gethan haben, sondern es ist nothwendig, die ganze Brennfigur zu construiren, weil je nach der Form der brechenden Flächen bald der eine, bald der andere Strahl mehr oder weniger günstig, d. h. mehr oder weniger homocentrisch gebrochen wird. Nur die Vergleichung der ganzen Brennfiguren ermöglicht ein Urtheil über die Zweckmässigkeit oder Unzweckmässigkeit einer bestimmten Linsenform.

Die verschiedenen Strahlenarten, welche ich gewählt habe, um vermittelst derselben ein Bild von der Brechung in den einzelnen Linsen zu geben, sind alle bei der Rindslinse Taf. IV, Fig. 1 vertreten, und wir können diese Zeichnung zur Erläuterung benutzen. Wir denken uns ein Bündel paralleler Strahlen unter einem beliebigen Winkel, etwa von 70°, (λ) mit der Axe auf die Vorderfläche der Linse auffallen. Von den einfallenden Strahlen sind nur zwei, der Lateralstrahl und ein anderer, gezeichnet. Der durch den optischen Mittelpunkt gehende Centralstrahl hat an Vorder- und Hinterfläche gleiche Brechungswinkel (φ und ψ), der austretende Strahl ist parallel dem eintretenden.

Als optischen Mittelpunkt einer homogenen Linse bezeichnet man denjenigen Punkt der Axe, welcher dieselbe in zwei Theile theilt, die sich zu einander wie die Radien verhalten. Man ziehe durch K und C parallele Radien und verbinde die Durchstosspunkte an der Vorder- und Hinterfläche. Die Verbindungslinie geht durch den optischen Mittelpunkt M. Wir haben zwei ähnliche Dreiecke, in welchen sich verhält $MK : r = MC : \varrho$. Bezeichnen wir SM mit x, so ergiebt sich

$$(d - x) + (r - d) : r = x - (d - \varrho) : \varrho$$
$$r - x : r = x - d + \varrho : \varrho$$
$$rx - rd + r\varrho = r\varrho - \varrho x$$
$$\frac{d - x}{\varrho} = \frac{x}{r}$$

Betrachtet man nun die Verbindungslinie der beiden Durchstosspunkte als den Weg eines Strahles, so sind die Winkel, welche derselbe an beiden Flächen mit den parallelen Radien bildet, gleich. Folglich müssen auch die Austrittswinkel gleich sein, d. h. der an der Vorderfläche eintretende und der an der Hinterfläche austretende Strahl sind einander parallel, wenn der Strahl innerhalb der Linse durch den optischen Mittelpunkt geht. Der Radialstrahl trifft senkrecht auf die Hinterfläche, da er durch den Krümmungsmittelpunkt derselben (C) geht. Der Einfallswinkel des Scheitelstrahls ist identisch mit dem Winkel, welchen das einfallende Bündel mit der Axe bildet, der Brechungswinkel ist ψ_1, an der Hinterfläche werden die betreffenden Winkel mit η und ϑ bezeichnet. Der Lateralstrahl, welcher 0·5 mm vor der Vorderfläche die Axe schneidet, hat an der Vorderfläche φ_2 und ψ_2, an der Hinterfläche η_2 und ϑ_2 zu Brechungswinkeln. Der Winkel, welchen jeder an der Vorderfläche gebrochene Strahl mit der Axe bildet, ist immer $= \lambda - \varphi + \psi$. Die Formeln, welche den Gang der Strahlen bestimmen, ergeben sich leicht aus der Betrachtung der Dreiecke, welche durch die Radien, die Axe und die eintretenden oder gebrochenen Strahlen gebildet werden. Auf den Tafeln sind

die Centralstrahlen gestrichelt,
die Radialstrahlen ausgezogen,
die Scheitelstrahlen und die Lateralstrahlen punktirt

zur Darstellung gekommen.

Allgemeine Bezeichnungen sind:

λ Einfallswinkel mit der Axe;

φ „ mit dem Loth } an der Vorderfläche;
ψ Brechungswinkel „ „ „ }

r Radius der Vorderfläche;
ϱ „ „ Hinterfläche;
d Axe der Linse;
δ Weglänge des Strahls in der Linse;
$\lambda - \varphi + \psi$ der Winkel, unter welchem der gebrochene Strahl die Axe schneidet;
η Einfallswinkel mit dem Loth } an der Hinterfläche;
ϑ Brechungswinkel } an der Hinterfläche;
M Optischer Mittelpunkt;
K Krümmungscentrum der Vorderfläche;
C „ „ Hinterfläche.

Formeln für den Gang der Strahlen.

I. Centralstrahlen:

$$\sin(\lambda - \varphi + \psi) = \frac{r + \varrho}{r + \varrho - d} \sin\psi$$

$$\sin\varphi = n \sin\psi$$

$$\delta = (r + \varrho)\frac{\sin(\lambda - \varphi)}{\sin(\lambda - \varphi + \psi)}$$

II. Radialstrahlen:

$$\sin(\lambda - \varphi + \psi) = \frac{r}{r + \varrho - d} \sin\psi$$

$$\sin\varphi = n \sin\psi$$

$$\delta = \varrho + (r + \varrho - d)\frac{\sin(\lambda - \varphi)}{\sin\psi}$$

III. Scheitelstrahlen:

$$\varphi = \lambda$$

$$\sin\varphi = n \sin\psi$$

$$\delta = \varrho \sin\frac{\psi - \eta}{\sin\psi}$$

$$\sin\eta = (d - \varrho)\frac{\sin\psi}{\varrho}$$

IV. Lateralstrahlen:

$$\sin\varphi = \frac{r + 0{\cdot}5}{r}\sin\lambda$$

$$\sin\varphi = n \sin\psi$$

$$\sin\eta = \frac{1}{\varrho}\left[r\sin\psi - (r - d + \varrho)\sin(\lambda - \varphi + \psi)\right]$$

$$\delta = \varrho\frac{\sin(\lambda - \varphi + \psi + \eta)}{\sin(\lambda - \varphi + \psi)} - \left(\frac{r\sin\psi}{\sin(\lambda - \varphi + \psi)} - r - 0{\cdot}5\right)\frac{\sin\lambda}{\sin(\varphi - \psi)}$$

Die Formeln für andere Strahlen, welche ausnahmsweise verwendet werden, lassen sich leicht nach Analogie der obigen entwickeln.

Die sphärischen Aberrationserscheinungen sind dargestellt an folgenden Linsen:

	r	ϱ	d	n	f	Vergr.	f.
1. 2. Kugelfläche und Kugellinse	10	10	20	1·5	5·0 mm	10fach =	5·0 cm
3. Planconvexlinse	∞	6	2	1·55	11·0 „	20 „ =	22 „
4. Biconvexlinse (symmetrisch)	8·5	8·5	3	1·55	7·1 „	15 „ =	10·65 „
5. Schweinslinse (ideal homogen)	7·5	5·5	7	1·54	4·9 „	20 „ =	9·8 „
6. Rindslinse (ideal homogen)	14	10	12	1·54	9·3 „	10 „ =	9·3 „
7. Menschenlinse (ideal homogen)	10	6	3·6	1·438	8·2 „	12½ „ =	10·25 „

Die Vergrösserung auf den Tafeln wurde so gewählt, dass die hintere Brennweite bei allen Linsen nahezu gleich ausfällt. Nur bei der Planconvexlinse war der Deutlichkeit wegen ein doppelt so grosser Massstab nothwendig. Dieses Verfahren ermöglicht ein sofortiges Erkennen der charakteristischen Unterschiede, welche die einzelnen Linsenformen bezüglich der Brechung verschiedener Strahlengattungen darbieten. Die hintere Brennweite, welche immer von der Hinterfläche ab gerechnet wird, beträgt bei allen Linsen auf den Tafeln ungefähr 10 cm, nur diejenige der Planconvexlinse das Doppelte.

3. Kugellinse.

Ich betrachte alle Linsen als von Luft umgeben. Die Brennweite wird von der Hinterfläche aus gerechnet. Die Kugellinse Taf. I Fig. 2 hat einen Radius = 10, Index = 1·5, hintere Brennweite = 5·0. Betrachten wir VSM als Axe, auf die Vorderfläche falle das Bündel VSBZ. Wenn sich das gleiche brechende Medium von der Vorderfläche bis über F hinaus erstreckte, so würde diese Fläche allein ganz dieselbe Brechung bewirken, wie wir sie in Fig. 1 kennen gelernt haben. Es sind hier dieselben Buchstaben wie dort zur Anwendung gekommen. F_1 ist der Hauptbrennpunkt der Vorderfläche.

Der Verlauf der Strahlen nach der Brechung an der Hinterfläche ist mit I α bis VI ϑ bezeichnet. Die lateinischen Zahlen bedeuten die ersten, die griechischen Buchstaben die zweiten Brennlinien nach den oben gegebenen Erläuterungen.

Bei einer Kugellinse kann eigentlich von einem schief auffallenden Bündel nicht die Rede sein, da ein jeder Punkt einer Fläche als der Scheitel derselben angesehen werden kann. Handelt es sich um ein YS paralleles Bündel, so kann man BM als Axe betrachten, die Aberrationserscheinungen kommen dann bei C in gleicher Weise wie bei F zu Stande, und entsprechen sich $b_7 a_7$ beziehentlich $i_6 a_7$ und VII ϑ beziehentlich VI ϑ hier und dort unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Brennstrecke $b_7 a_7$ für das dünne Bündel XS berechnet ist, wie wir oben weitläufiger auseinandergesetzt haben. Gleich verhält es sich, wenn wir ein DM parallel einfallendes Bündel vor uns haben. Es entsprechen sich dann VI η an beiden Orten, u. s. w.

Da aber bei den übrigen Linsenformen der Scheitel jedesmal ein bestimmter Punkt ist, so wollen wir die dort zu übende Betrachtungsweise auch bei der Kugel anwenden. Wir können uns z. B. denken, es sei durch ein Diaphragma die Beschränkung der Vorderfläche hergestellt. Die Axe sei wiederum SM. Wir lassen nun Bündel paralleler Strahlen auf die Vorderfläche fallen unter verschiedenen Winkeln mit der Axe, das Bündel YSBM unter einem Winkel von 70°, ein DM paralleles Bündel unter einem solchen von 60° und so weiter fort. Von jedem Bündel ist der durch den optischen Mittelpunkt gehende Centralstrahl gezeichnet, welcher bei der Kugel homocentrisch gebrochen wird, da er auf beide Flächen senkrecht auffällt; das demselben entsprechende unendlich dünne Bündel erleidet keine astigmatische Brechung, die Brennstrecke fehlt. Weiter ist jedesmal der Scheitelstrahl mit seiner Brennstrecke gezeichnet, und zwar bedeuten die Punkte die ersten Brennlinien, die Striche die zweiten, die Längen der Brennstrecken sind durch Verdickung der Linien hervorgehoben. Die Orte der Brennlinien sind durch Curven verbunden. Man kann so leicht das Anwachsen der Brennstrecken mit dem schieferen Einfall der Bündel verfolgen. Nach der ersten Brechung ist $b_1 b_2 b_3$ u. s. w. die Curve der ersten, $a_1 a_2 a_3 \ldots$ diejenige der zweiten Brennlinien, nach der Brechung an der Hinterfläche I II III ... die Curve der ersten, $\alpha \beta \gamma \ldots$ die der zweiten Brennlinien. Wären die brechenden Flächen beschränkt, so könnten von schief einfallenden Bündeln nur astigmatisch gebrochene Strahlen beim Entwerfen des Bildes in Frage kommen.

4. Die planconvexe Linse.

Die planconvexe Linse Taf. II Fig. 3 kehrt die ebene Fläche dem eintretenden Licht zu. Radius = 12, Axe = 4, Brennweite = 22, Index = 1·55. Die Aberration parallel zur Axe auffallender Strahlen weicht nicht von derjenigen bei der einfachen Fläche und der Kugellinse ab, die Bezeichnung ist dieselbe wie dort. Die Aberration ist erläutert an 8 je 5° von einander entfernt austretenden Strahlen.

Hinsichtlich der Brechung schiefer Bündel zeigen sich aber bei dieser Linsenform schon Verschiedenheiten. Von dem unter 70° mit der Axe auf die Vorderfläche fallenden Bündel ist die Aberration vollständig dargestellt. An der Vorderfläche erleiden alle Strahlen selbstverständlich nur eine gleichgrosse

Ablenkung. Der durch den optischen Mittelpunkt M gehende Strahl, welcher die Linse unter einem Winkel von 70° wieder verlässt, hat keineswegs die günstigsten Aberrationsverhältnisse aufzuweisen, vielmehr die nahezu ungünstigsten. Die günstigsten zeigt der nach der Ablenkung durch den Krümmungsmittelpunkt der Hinterfläche C gehende: der Radialstrahl. Das diesem entsprechende dünne Bündel erleidet vollständig homocentrische Brechung. Die übrigen Brennstrecken sind zu diesem Strahl genau so orientirt, wie zum Axenstrahl bei der Brechung längs der Axe, und ist der Radialstrahl als die Axe des Aberrationskegels bei schiefen Bündeln anzusehen. Der Radialstrahl selbst wird an der Vorderfläche abgelenkt. Auch muss derselbe in Folge prismatischer Wirkung Farbenzerstreuung beobachten lassen. Alle Strahlen sind lichtschwächer, da sich das schmalere Bündel auf die gleiche Ausdehnung der Vorderfläche vertheilt. Bei dem Bündel von 70° ist noch der Gang des Scheitelstrahls berechnet. Derselbe zeigt eine Brennstrecke mittlerer Länge s s und eine Längen-Aberration $s c_7$. Die einfallenden Bündel sind nur für 70° und 10° gezeichnet und sind für die übrigen Grade hinzuzudenken. An den Centralstrahlen sind die Brennstrecken mit $g_1 k_1$ für das unter 10° mit der Achse einfallende Bündel und so fort bis $g_7 k_7$ für das unter 70° eintretende Bündel bezeichnet.

Die Aberration drückt sich aus in den Strecken $c_1 g_1$, $c_2 g_2$ bis $c_7 g_7$.

Der Axenstrahl bei der centralen Brechung eines senkrechten Bündels vereinigte dreierlei Eigenschaften:

1. den senkrechten Eintritt,
2. die gleichbleibende Richtung,
3. die homocentrische Brechung.

Bei der Kugellinse fanden wir diese Eigenschaften noch für alle Richtungen sämmtlich vereinigt im Centralstrahl vor. Für schiefe Bündel existirt bei der planconvexen Linse ein Normalstrahl überhaupt nicht mehr, der Centralstrahl besitzt zwar gleichbleibende Richtung, zeigt aber bedeutende Aberration und Astigmasie. Hinsichtlich der homocentrischen Brechung ist der Radialstrahl an die Stelle des Axenstrahls getreten.

Bei den übrigen Linsen werden wir nicht mehr die ganze Aberration entwickeln, sondern dieselbe in der Regel nur durch die drei Strahlen: Central-, Scheitel- und Radialstrahl repräsentiren lassen für jedes Bündel parallel eintretender Strahlen.

Tabelle II.

Planconvexe Glaslinse ($r = \infty$ $\varrho = 6$ $d = 2$ $n = 1 \cdot 55$).

Schiefe Bündel.							Paraxiale Bündel.		
$\lambda = \varphi$	ψ	ζ	δ	P_2	P_1	Bst.	η	ϑ	l[1])
70	37° 19	0·891	2·423	6·734	0·7877	5·9463	0	0	16·909
60	33° 58	0·786	2·327	7·634	1·908	5·726	5	7° 46	16·79
50	29° 37	0·704	2·235	8·523	3·522	5·001	10	15° 37	16·5
40	24° 30	0·644	2·153	9·317	5·467	3·850	15	23° 39	16·005
30	18° 49	0·601	2·087	9·983	7·487	2·496	20	32° 1	15·27
20	12° 45	0·572	2·039	10·49	9·263	1·227	25	40° 55	14·33
10	6° 26	0·555	2·010	10·81	10·49	0·32	30	50° 48	13·09
0	0	0·55	2·000	10·909		0	35	62° 45	11·45
							40	85° 5	8·44

Scheitelstrahl.

$\lambda = \varphi$	ψ	ζ	δ	η	ϑ	P_2	P_1	Bst.	$(\lambda - \eta + \vartheta)$
70	37° 19	0·06385	2·308	23° 50	38° 47	9·397	5·71	3·687	52° 16

[1]) l = Entfernung des Aberrations- resp. Brennpunktes auf dem Axenstrahl vom Centrum der Hinterfläche.

5. Die symmetrische Biconvexlinse.

Die symmetrische Biconvexlinse Taf. III Fig. 1 hat einen Radius = 25·5, Index = 1·55, Axe = 9, Brennweite = 21·3.

Zuerst haben wir die Brechung an der Vorderfläche allein ins Auge zu fassen. Der Mittelpunkt derselben ist K. Die parallel der Axe einfallenden Strahlen haben ihren Hauptbrennpunkt in F_1. Denken wir uns die Vorderfläche nach oben hin weiter ausgedehnt, so würde auf dem um K mit KF_1 geschlagenen Kreise bei 70° der Hauptbrennpunkt eines unter einem Winkel von 70° mit der Axe parallel K — 70° einfallenden Bündels sein. Das Gleiche gilt von den übrigen zwischen F_1 und 70° auf der Peripherie befindlichen Punkten für die entsprechenden Strahlenbündel. Die centrale Aberration ist an 6 in Zwischenräumen von 5° einfallenden Strahlen dargestellt. Die zweiten Brennlinien nach der ersten Brechung sind mit a_1 bis a_6 bezeichnet.

Von den übrigen Bündeln ist die Lage der Brennlinien jedesmal am Central- und Radialstrahl, bei den 50°-, 60°- und 70°-Bündeln auch an dem Scheitelstrahl berechnet.

Die Brechung an der zweiten Fläche liefert für die längs der Axe verlaufenden Bündel ganz ähnliche Erscheinungen wie an den schon besprochenen Linsen und ist auch die Bezeichnung dieselbe geblieben. Hinsichtlich der unter Winkeln von 10° bis 70° mit der Axe C eintretenden Bündel ist zunächst wieder der Wegfall des Normalstrahles hervorzuheben. Abweichend von dem Verhalten der planconvexen Linsen existirt hier überhaupt kein stigmatisch gebrochener Strahl mehr, alle haben mehr weniger lange Brennstrecken aufzuweisen. Die Aberrationserscheinungen nach der zweiten Brechung sind jedesmal am Central- und Radialstrahl, bei den 50°-, 60°- und 70°-Bündeln auch an den Scheitelstrahlen, dargestellt. Die äusseren Caustiken I II III bilden Curven von ähnlicher Form wie bei der planconvexen Linse. Jetzt ist aber auch die innere Caustica I I, II I, III I I eine Linie von starker Krümmung.

Bei der in Rede stehenden Linse zeigt der Radialstrahl von den drei Strahlen die kürzeste Brennstrecke und die am weitesten von der Linse abliegende I. Brennlinie. Am Centralstrahl sind die Verhältnisse bezüglich Aberration und Astigmasie die ungünstigsten.

Tabelle III.

Symmetrische homogene biconvexe Glaslinse.
(n = 1·55 r = 8·5 d = 3 f = 7·21)

Schiefe Bündel.

Centralstrahlen.

						Vorderfläche.			Hinterfläche.		
λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.
70	61° 5	34° 23	43° 18	0·7955	3·842	16·56	11·28	5·28	4·647	0·9933	3·6537
60	52° 25	30° 45	38° 20	0·7221	3·616	18·25	13·47	4·78	5·245	1·850	3·395
50	43° 45	26° 30	32° 45	0·6646	3·421	19·82	15·88	3·94	5·799	2·934	2·865
40	35° 1	21° 44	26° 43	0·621	3·277	21·22	18·31	2·91	6·287	4·136	2·151
30	26° 17	16° 36	20° 18	0·5884	3·176	22·39	20·61	1·78	6·674	5·321	1·353
20	17° 33	11° 13	13° 40	0·5665	3·076	23·26	22·38	0·88	6·975	6·32	0·655
10	8° 47	5° 39	6° 52	0·5537	3·019	23·79	23·56	0·23	7·176	6·984	0·192
0	0	0	0	0·55	3·0	23·95		0	7·21		0

Radialstrahlen.

						Vorderfläche.			Hinterfläche.		
λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.
70	87° 7	40° 7	23°	1·135	2·105	11·74	6·867	4·873	4·434	2·562	1·872
60	76° 29	38° 51	22° 21	0·963	2·167	13·68	8·298	5·382	5·015	3·149	1·866
50	65°	35° 47	20° 47	0·834	2·303	15·80	10·4	5·40	5·583	3·903	1·680
40	52° 43	30° 53	18° 10	0·7242	2·496	18·19	13·4	4·79	6·12	4·835	1·285
30	39° 54	24° 27	14° 33	0·6438	2·684	20·46	16·96	3·50	6·584	5·771	0·813
20	26° 44	16° 52	10° 8	0·5909	2·843	22·30	20·43	1·87	6·927	6·544	0·383
10	13° 23	8° 35	5° 12	0·5602	2·964	23·52	22·99	0·53	7·131	7·036	0·095
0	0	0	0	0·55	3	23·95		0	7·21		0

Scheitelstrahlen.

						Vorderfläche.				Hinterfläche.		
$\lambda=\varphi$	ψ	η	ϑ	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	ζ	P_2	P_1	Bst.
70	37° 19	23°	37° 27	0·891	3·467	14·79	9·353	5·437	0·632	4·663	2·121	2·542
60	33° 58	21° 12	34° 5	0·786	3·362	16·76	11·53	5·23	0·617	5·313	2·888	2·425
50	29° 37	18° 39	29° 43	0·705	3·272	18·69	14·12	4·57	0·601	5·841	3·791	2·050

Aeusserster Strahl für $\lambda = 70^0$.

φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	δ	ζ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.
89	40° 10	21° 10	1·98	0·5513	11·29	6·592	4·698	4·324	2·48	1·844

Paraxiale Bündel.

Vorderfläche.			Hinterfläche.		
φ	ψ	l[1])	η	ϑ	l[1])
0	0	15·45	0	0	15·71
5	3° 13	15·36	6° 9	9° 33	15·65
10	6° 25	15·24	12° 23	19° 25	15·36
15	9° 37	15·14	18° 46	29° 54	14·91
20	12° 15	14·86	25° 22	41° 37	14·16
25	15° 49	14·52	32° 23	56° 6	12·99
30	18° 49	14·14	39° 57	84° 24	10·25

6—8. Ideale homogene Schweins-, Rinds- und Menschenlinse.

Unter idealer homogener Schweinslinse soll eine homogene Linse verstanden werden, welche mit der wirklichen Linse congruente Gestalt hat und deren Index derartig gewählt ist, dass die hintere Brennweite, von der Hinterfläche ab gerechnet, gleich wird derjenigen der wirklichen Schweinslinse. Das Analoge gilt von den ideal homogenen Rinds- und Menschenlinsen.

Eigene Messungen, auf welche weiter unten näher eingegangen werden soll, ergaben in Uebereinstimmung mit denen von Matthiessen als Mittelwerthe für die ideale homogene Schweinslinse folgende Zahlen: $r = 7.5$ mm $\varrho = 5.5$ mm $d = 7$ mm $n = 1.54$ mm $f = 4.9$ mm.

[1]) l ist die Entfernung des Brenn- resp. Aberrationspunktes auf dem Axenstrahl vom Centrum der Vorder- beziehentlich Hinterfläche.

Auf der Tafel wurde die Schweinslinse 20mal vergrössert dargestellt, damit die hintere Brennweite 9·8 cm dem Mittelwerthe 10 cm möglichst nahe kommt.

Die Mittelwerthe für die ideale homogene Rindslinse sind:

$$r = 14 \text{ mm} \quad \varrho = 10 \text{ mm} \quad d = 12 \text{ mm} \quad n = 1{\cdot}54 \quad f = 9{\cdot}3 \text{ mm}.$$

Die Vergrösserung ist eine zehnfache.

Da es sich um Mittelwerthe handelt, so weichen die Zahlen bei jeder einzelnen Linse je nach der Grösse und dem Alter des Thieres davon ab. Die Linsen der gewöhnlich erhältlichen Rindsaugen zeigen viel geringere Verschiedenheiten nach meiner Erfahrung als die Schweinslinsen.

Die Verhältnisse der Menschenlinse sind folgende:

$$r = 10 \text{ mm} \quad \varrho = 6 \text{ mm} \quad d = 3{\cdot}6 \text{ mm} \quad n = 1{\cdot}438 \quad f = 8{\cdot}2 \text{ mm}.$$

Bei 12½facher Vergrösserung wird die hintere Brennweite = 10·25 cm. Die Zeichnungen dieser Linsen sind in derselben Weise ausgeführt wie die der symmetrischen Biconvexlinse. Auf die paraxiale Brechung ist hier keine Rücksicht genommen. Eine Darstellung derselben für die Rindslinse findet sich Taf. IX Fig. 2, auf welche wir bei Besprechung des Unterschiedes zwischen idealer und homogener Linse zurückkommen werden. Die vorliegenden Tafeln erläutern die Brechung schiefer Bündel. Die Centralstrahlen sind gestrichelt, die Radialstrahlen ausgezogen, die Scheitelstrahlen punktirt. Bei der Rindslinse treten noch Lateralstrahlen hinzu, welche punktirt sind. Die ersten Brennlinien wurden durch Punkte, die zweiten durch Striche, die Brennstrecken nach der zweiten Brechung durch Verdickung der Linien kenntlich gemacht. Die Brennfigur eines jeden Bündels wird uns jedes Mal durch eine Anzahl von Brennstrecken einzelner Theilbündel repräsentirt und zwar gewöhnlich durch die drei, entsprechend den Central-, Radial- und Scheitelstrahlen, welche wir schon bei der Planconvex- und Biconvexlinse kennen gelernt haben. Ausser diesen wurden bei der Rinds- und Schweinslinse für das 70°-Bündel noch je zwei dazwischen verlaufende Strahlen gezeichnet, so dass die Brennfigur dieses Bündels an jeder Linse fünf Brennstrecken aufweist. Die ersten Brennlinien sind mit I, II, III, IV, V, die zweiten mit I I, II II, III III, IV IV, V V bezeichnet.

Auf jeder der beiden Tafeln findet sich eine schematische Darstellung dieser Brennfigur beigefügt.

Bei der Rinds- und Schweinslinse liegt der Radialstrahl zwischen Central- und Scheitelstrahl, während bei der menschlichen Linse wie bei der Biconvexlinse der letztere der mittlere Strahl ist. In den ersten beiden Linsen erfährt ein Strahl die günstigste Brechung, welcher zwischen Central- und Radialstrahl verläuft, in der menschlichen Linse liegt ähnlich wie bei der Biconvexlinse der günstigste Strahl in unmittelbarer Nähe des Radialstrahles.

Tabelle IV.

Homogene Menschenlinse (Totalindex n = 1·438 r = 10 ϱ = 6 d = 3·6 f = 8·2075).

Schiefe Bündel.

Centralstrahlen.

						Vorderfläche.			Hinterfläche.		
λ	φ	ψ	λ—φ+ψ	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.
70	56° 55	35° 38	48° 43	0·6229	4·82	23·09	15·25	7·84	5·477	1·528	3·949
60	49° 1	31° 40	42° 39	0·5686	4·499	25·29	18·31	6·98	6·169	2·657	3·512
50	41° 2	27° 10	36° 8	0·525	4·229	27·39	21·67	5·72	6·697	3·732	2·965
40	33° 1	22° 16	29° 15	0·4925	4·04	29·2	25	4·2	7·184	4·989	2·195
30	24° 50	16° 59	22° 9	0·4675	3·81	30·76	28·13	2·63	7·621	6·237	1·384
20	16° 37	11° 28	14° 51	0·4518	3·7	31·83	30·57	1·26	7·913	7·408	0·505
10	8° 20	5° 47	7° 27	0·4407	3·62	32·63	32·30	0·33	8·131	7·962	0·169
0	0	0	0	0·438	3·6	32·83		0	8·2075		0

Radialstrahlen.

λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	ζ	δ	Vorderfläche. p_2	p_1	bst.	Hinterfläche. P_2	P_1	Bst.
70	79° 40	43° 10	33° 30	0·8696	2·957	16·54	8·797	7·743	5·592	3·133	2·459
60	68° 54	40° 27	31° 33	0·734	3·043	19·58	11·35	8·23	6·253	4·062	2·191
50	57° 41	36°	28° 19	0·6294	3·180	22·85	14·96	7·89	6·845	5·128	1·717
40	46° 16	30° 10	23° 54	0·5517	3·32	26·06	19·48	6·58	7·34	6·173	1·167
30	34° 43	23° 20	18° 37	0·499	3·44	28·82	24·3	4·52	7·712	7·046	0·666
20	23° 8	15° 51	12° 43	0·4634	3·54	31·03	28·72	2·31	7·98	7·685	0·295
10	11° 33	8°	6° 27	0·4442	3·59	32·37	31·75	0·62	8·132	8·06	0·172
0	0	0	0		3·6	32·83		0	8·2075		0

Scheitelstrahlen.

$\lambda=\varphi$	ψ	η	ϑ	ζ	δ	Vorderfläche. p_2	p_1	bst.	Hinterfläche. ζ	P_2	P_1	Bst.
70	40° 48	15° 9	22° 5	0·746	3·975	19·28	11·05	8·23	0·461	5·854	3·277	2·577
60	37° 2	13° 56	20° 16	0·648	3·910	22·19	14·14	8·05	0·458	6·452	4·217	2·235
50	32° 11	12° 18	17° 51	0·574	3·832	25·05	17·95	7·10	0·453	6·977	5·247	1·730

Tabelle V.

Homogene Rindslinse ($n=1\cdot54 \quad r=14 \quad \varrho=10 \quad d=12$).

Schiefe Bündel.

Centralstrahlen.

λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	ζ	δ	Vorderfläche. p_2	p_1	bst.	Hinterfläche. P_2	P_1	Bst.	Axenpunkte hinter Vorder-Fläche.	Axenpunkte vor Hinter-Fläche.
70	39° 7	24° 11	55° 4	0·629	15·06	34·28	28·52	5·76	6·992	3·807	3·185	4·6	3·047
60	34° 27	21° 33	47° 6	0·607	14·13	35·52	30·73	4·79	7·535	4·813	2·722	4·855	3·208
50	29° 10	18° 27	39° 17	0·588	13·48	36·67	32·99	3·68	7·985	5·877	2·108	5·093	3·349
40	23° 41	15° 7	31° 26	0·5712	13	37·76	35·18	2·58	8·377	6·876	1·501		
30	17° 58	11° 33	23° 35	0·5578	12·55	38·65	37·10	1·55	8·712	7·803	0·909		
20	12° 4	7° 48′ 30″	15° 44	0·5481	12·35	39·34	38·61	0·73	8·938	8·508	0·430		
10	6° 4	3° 55	7° 52	0·5415	12·08	39·82	39·63	0·19	9·118	9·007	0·111		
0	0	0	0	0·54	12	39·92		0	9·171		0		

Distanz zwischen den Axenpunkten

70°	4·35
60°	3·937
50°	3·558

Radialstrahlen.

λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	ζ	δ	Vorderfläche. p_2	p_1	bst.	Hinterfläche. P_2	P_1	Bst.
70	62° 55	35° 19	42° 24	0·8027	12·56	26·86	17·88	8·98	6·184	2·911	3·273
60	53° 57	31° 37	37° 40	0·7235	12·413	29·80	21·61	8·19	7·013	4·517	2·496
50	44° 58	27° 19	32° 21	0·6605	12·31	32·64	25·77	6·87	7·710	5·945	1·765
40	36°	22° 26	26° 26	0·615	12·22	35·06	29·95	5·11	8·208	7·067	1·141
30	27° 2	17° 10	20° 8	0·580	12·15	37·17	33·93	3·24	8·654	8·019	0·635
20	18° 2	11° 36	13° 34	0·5581	12·1	38·63	37·07	1·56	8·925	8·646	0·279
10	9°	5° 50	6° 50	0·5443	12·03	39·20	38·61	0·59	9·108	9·033	0·075
0	0	0	0	0·54	12·0	39·92		0	9·171		0

Lateralstrahlen (Halbmillimeter-).

											Vorderfläche.				Hinterfläche.			
λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	m	η	ϑ	g	k	δ	ζ	p_2	p_1	bst.	ζ_1	P_2	P_1	Bst.	$\lambda-\varphi+\psi-\vartheta+\eta$
70	76° 43	39° 12	32° 29	16·47	13° 53	21° 42	13·48	3·04	10·44	0·963	22·38	13·44	8·94	0·5659	5·388	1·597	3·791	24° 40
60	63° 46	35° 37	31° 51	15·45	10° 29	16° 17	12·76	1·744	11·016	0·810	26·62	17·59	9·03	0·5541	6·489	3·267	3·222	26° 3
50	52° 30	31° 1	28° 31	15·1	8° 31	13° 10	12·61	1·255	11·355	0·691	31·20	22·92	8·28	0·5493	7·541	5·119	2·422	23° 52

Scheitelstrahlen.

							Vorderfläche.			Hinterfläche.		
$\lambda=\varphi$	ψ	δ	m	η	ϑ	$\psi-\vartheta+\eta$	p_2	p_1	B	P_2	P_1	Bst.
70	37° 36	11·47	1·34	6° 50	10° 34	33° 52	24·55	14·41	10·14	5·795	2·195	3·600
60	34° 13	11·59	1·39	6° 28	9° 59	30° 42	27·88	19·06	8·82	6·711	3·759	2·952
50	29° 50	11·68	1·41	5° 42	8° 49	26° 43	31·11	23·41	7·70	7·469	5·289	2·180

Centralstrahlen an der Vorderseite.

	P_2	P_1	Bst.
70°	4·799	2·106	2·693
60°	5·544	3·18	2·364
50°	6·13	4·253	1·877
0°	7·58	7·58	0 [1])

Zwischenstrahl.

λ	φ	ψ	$\lambda-\varphi+\psi$	m	η	ϑ	k
70	49° 2	29° 22	50° 12	8·935	13° 37	21° 16	3·065

Paraxiale Bündel.

Vorderfläche.							Hinterfläche.					
φ	ψ	δ	A. v. K.[2])	p_2	p_1	bst.	η	ϑ	A. v. C.[2])	P_2	P_1	Bst.
30°	18° 57		23·72	36·52								
20°	12° 50	10·62	24·92	38·38	36·49	1·89	27° 26	45° 11	16·84	8·22	4·39	3·83
10°	6° 29	11·89	25·74	38·63	39·13	0·50	13° 23	20° 53	18·66	8·94	7·94	1·00

Ideale geschichtete Rindslinse.

Axendurchmesser: Vordere Schale = 4 Kern = 3 Hintere Schale = 5

Radien des Kerns $r_1 = 10$ $r_2 = 5$

Indices: Schale $n_1 = 1·38$ Kern $n_2 = 1·46$ $n_2 : n_1 = 1·058$ Totalindex = 1·54

Centrale Brennweite = 9·158.

Centralstrahlen.

60 Grad (59° 29).

φ	I	34° 27	II	35° 20	III	43° 20	IV	21° 10
ψ		24° 12		33° 8		46° 33		29° 53

Axenpunkt vor der Hinterfläche: 4·216.

Brennweiten.

P_2	I	44·51	II	32·84	III	18·68	IV	6·556
P_1		37·11	(4·5)	27·31	(4)	11·6	(6)	2·616
							Bst.:	3·94

70 Grad (69° 28).

φ	I	39° 7	II	40° 20	III	49° 5	IV	23° 40
ψ		27° 12		37° 43		53° 5		33° 40

Axenpunkt vor der Hinterfläche: 4·081.

Brennweiten.

P_2	I	42·77	II	31·31	III	17·31	IV	5·973
P_1		33·84	(4·8)	24·13	(4·4)	8·699	(6·2)	1·179
							Bst.:	4·794

Brechung des 70°-Scheitelstrahles.

Index = 1·5 $\psi = 38° 47$ $\eta = 7°$ $\vartheta = 10° 32$ Index = 1·338 $\psi = 42° 55$ $\eta = 7° 10$ $\vartheta = 9° 55$

Brennweiten $\begin{cases} P_2 & 25·38 \\ P_1 & 15·43 \end{cases}$ ($\delta = 11·76$) $\begin{cases} 6·224 \\ 2·133 \end{cases}$

Bst.: 4·091

[1]) Nach der ersten Brechung von der Hinterfläche = 28·5.

[2]) Entfernungen der Aberrationspunkte von den Krümmungscentren.

Tabelle VI.

Homogene Schweinslinse ($n = 1 \cdot 54$ $r = 7 \cdot 5$ $\varrho = 5 \cdot 5$ $d = 7$).

Centralstrahlen.

						Vorderfläche.			Hinterfläche.			Axenpunkte von der	
λ	φ	ψ	$\lambda - \varphi + \psi$	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.	Vorderfläche.	Hinterfläche.
70	36° 15	22° 35	56° 20	0.6156	8·658	18·76	15·99	2·77	3·785	2·237	1·548	2·781	1·92
60	31° 57	20° 6	48° 9	0·6075	8·202	19·33	17·05	2·28	4·049	2·748	1·301	2·917	2·004
50	27° 14	17° 17	40° 3	0·5818	7·83	19·85	18·10	1·75	4·327	3·241	1·086	3·019	2·07
40	22° 9	14° 10	32° 1	0·5669	7·5	20·37	19·15	1·22	4·49	3·775	0·715	Distanz der Axenpunkte.	
30	16° 49	10° 50	24° 1	0·5558	7·3	20·78	20·05	0·73	4·657	4·21	0·447		
20	11° 19	7° 19	16°	0·5465	7·15	21·13	20·79	0·34	4·774	4·568	0·206	70°	2·299
10	5° 41	3° 41	8°	0·5419	7·04	21·31	21·23	0·08	4·876	4·791	0·085	60°	2·079
0	0	0	0	0·54	7	21·4		0	4·873		0	50°	1·911

Radialstrahlen.

						Vorderfläche.			Hinterfläche.		
λ	φ	ψ	$\lambda - \varphi + \psi$	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.
70	59° 37	34° 4	44° 27	0·7412	7·4305	15·01	10·06	4·950	3·319	1·462	1·857
60	51° 10	30° 23	39° 13	0·7009	7·322	16·87	12·27	4·60	3·854	2·442	1·412
50	42° 43	26° 8	33° 25	0·6475	7·222	17·82	14·36	3·46	4·107	3·187	0·920
40	34° 15	21° 26	27° 8	0·6064	7·15	19·05	16·5	2·55	4·393	3·803	0·590
30	25° 45	16° 23	20° 38	0·5773	7·08	20·02	18·42	1·60	4·606	4·373	0·233
20	17° 12	11° 4	13° 52	0·5557	7·03	20·78	20·02	0·76	4·758	4·614	0·144
10	8° 36	5° 34	6° 58	0·5442	7	21·22	21·02	0·20	4·842	4·808	0·034
0	0	0	0	0·54	7	21·4		0	4·873		0

Scheitelstrahlen.

						Vorderfläche.			Hinterfläche.					
$\lambda = \varphi$	ψ	η	ϑ	ζ	δ	p_2	p_1	bst.	P_2	P_1	Bst.	ζ_1	$\psi - \vartheta + \eta$	m
70	37° 36	9° 35	14° 51	0·878	6·616	13·15	8·258	5·092	2·976	0·923	2·053	0·5519	32° 20	1·135
60	34°	8° 49	13° 40	0·776	6·684	14·88	10·23	4·65	3·473	1·801	1·672	0·55	29° 9	1·163
50	29° 50	7° 48	12° 3	0·693	6·751	16·66	12·44	4·22	3·92	2·618	1·302	0·548	25° 35	1·158
40	24° 40	6° 32	10° 6	0·633	6·827	18·25	15·07	3·18	4·273	3·416	0·857	0·5455		
30	18° 57	5° 5	7° 50	0·591	6·898	19·54	17·48	2·06	4·534	4·037	0·497	0·5437		

Zwischenstrahlen.

λ	φ	ψ	η	ϑ	P_2	P_1	Bst.
70	44° 46	27° 13	13° 58	21° 50	5·62	4·326	1·675
	46° 6	27° 54	12° 25	19° 19	5·75	4·496	1·504

Centralstrahlen an der Vorderseite.

	P_2	P_1	Bst.
70	2·604	1·276	1·328
60	2·862	1·742	1·120
50	3·264	2·357	0·907
0	4·01	4·01	0·0 [1]

[1] Nach der ersten Brechung von der Hinterfläche = 15·7.

Ideale geschichtete Schweinslinse.

Axendurchmesser: Vordere Schale = 2·5 Kern = 1·54 Hintere Schale = 2·96
Radien des Kerns r_1 = 5·0 r_2 = 2·502
Indices: Schale n_1 = 1·38 Kern n_2 = 1·455 $n_2 : n_1$ = 1·054
Centrale Brennweite = 4·846.

Brechung des Centralstrahles 70°.

φ	I 36° 15	II 40	III 50° 55	IV 22° 10
ψ	25° 22	37° 34	54° 55	31° 23

Axenpunkt vor der Hinterfläche: 2·46.

Brennweiten.

P_2	I 46·98	II 33·68	III 17·616	IV 2·905
P_1	38·36	(2·95) 26·44	(2·26) 8·912	(3·64) 0·477
				Bst.: 2·428

Brechung des Scheitelstrahles 70° (Index = 1·5).

φ = 70° ψ = 38° 47 η = 9° 50 ϑ = 14° 51

Brennweiten.

P_2	I 13·6	(6·587)	II 3·254
P_1	8·263		0·971
			Bst.: 2·283

9. Brennlinien. Brennfigur. Brenngebilde. I.

Das Charakteristische für die Caustiken bei Einfall schiefer Strahlenbündel auf sphärische Flächen besteht im Fehlen des stigmatischen Strahles, welcher bei senkrechtem Einfall die Aberrationsaxe bildet. Auf Tafel VI habe ich eine Reihe schematischer Figuren zusammengestellt, welche dazu bestimmt sind, die Bedeutung der in den Hauptfiguren nur durch Verstärkung der Strahlenlinien wiedergegebenen Brennstrecken zu erklären und so gewissermassen das Lesen der Darstellungen von der Strahlenbrechung in den einzelnen Linsen zu ermöglichen. Fig. 3 Taf. VI zeigt schematisch die Lage der Caustiken und Brennlinien für schräg einfallende Strahlen. Wir vergleichen damit die Fig. 2 Taf. VI, welche die Aberration für ein parallel zur Axe auffallendes Bündel wiedergiebt.

Die äussere Caustica $b\,b_5\,b_4\,b_3\,b_0\,b_1\,b_2\,b_6$ hat eine ähnliche Form, bei der inneren ist dagegen an die Stelle der geraden in sich rückläufigen Linie a_2 F — F a_2, welche mit der Axe zusammenfiel, eine Curve $a_2\,a_1\,a_0\,a_3\,a_4\,a_5$ getreten. Die äussere Caustica ist als ein senkrecht zur Ebene des Papiers stehendes Band, die innere als eine in der Ebene des Papiers liegende scharfe Schneide aufzufassen, wie dies schematisch Fig. 4 wiedergiebt.

Die Gestaltung der Brennfigur bei Brechung schräger Bündel an einer Fläche haben wir schon oben kennen gelernt. Man kann sich die Fläche bis zum Axenstrahl fortgesetzt denken, z. B. in Fig. 1 Taf. VI bis zu dem Axenstrahl des 70°-Bündels K — 70°. Die zweiten Brennlinien sämmtlicher auf die Vorderfläche der Linse auffallenden Strahlen müssen in dem Axenstrahl liegen. Die Brennfigur wird gebildet durch die Brennstrecken 1—11, 2—22, 3—33, und das Brenngebilde ergiebt sich, wenn man die Brennfigur um den Axenstrahl K — 33 — 22 — 11 — 70° rotiren lässt. In der schematischen Figur 2 Taf. VI müssen wir uns also die Brennfigur b_1 — a_1 und b_2 — a_2 um AF gedreht denken, der Drehungswinkel hängt von der Dicke des Bündels, d. h. von der Appertur desselben, ab. Das Brenngebilde eines schrägen Bündels nach der Brechung an einer beschränkten Fläche ist somit immer identisch mit einem Stück des centralen Brenngebildes. Nach der Brechung des beschränkten Bündels an der Hinterfläche liegen zwar die zweiten Brennlinien noch immer in der Einfallsebene, sie bilden aber keine gerade Linie mehr, sondern eine Curve. Das Brenngebilde ist jetzt schwieriger zu construiren. Solange es sich um Bündel handelt, welche im vertikalen Meridian nur eine geringe Appertur haben, kann man die ersten Brennlinien als senkrechte Geraden zur Einfallsebene betrachten. Dies ist in den thierischen Augen der Fall, weil das Irisdiaphragma nur ein Bündel von verhältnissmässig geringem Querschnitt durchtreten lässt. Ohne einen Fehler von praktischer Bedeutung zu begehen, können wir daher bei den thierischen Augen die ersten Brennlinien als gerade zur Einfallsebene senkrechte Linien ansehen, so wie sie die schematischen Figuren 4 und 5 versinnlichen. Eine genauere Vorstellung vom Brenngebilde erhält man auf folgende Weise. Man verbindet die zweite Brennlinie nach der ersten Brechung 11 mit dem Krümmungs-

mittelpunkte der Hinterfläche C. Auf dieser Linie liegt die zweite Brennlinie II nach der zweiten Brechung. Denn C — 11 ist der Axenstrahl des auf die Hinterfläche auffallenden, nach 11 convergirenden Bündels 1 — 11, C — 11 und die Brennlinie II ist das Bild der Brennlinie 11 in Bezug auf die Hinterfläche der Linse. Das Brenngebilde erhalten wir nun, indem wir die Brennstrecke I — II um die Axe C — 11 rotiren lassen. Dieselbe Construction ist für die übrigen Strahlen auszuführen. Die erste Brennlinie eines Bündels, dessen Querschnitt im vertikalen Meridian nicht mehr vernachlässigt werden darf, nimmt also die Form eines Halbmondes an, der seine Convexität der Linsenaxe zukehrt, wenn die zweite Brennlinie nach aussen von dem Radialstrahl, welcher die Hinterfläche ohne Ablenkung durchsetzt, liegt, seine Concavität dagegen, wenn die zweite Brennlinie zwischen diesem Strahl und der Linsenaxe sich befindet. Entspräche z. B. in Fig. 4 die Brennstrecke $Q_1 b_1 — a_1$ der Brennstrecke I — II der Fig. 1, so würde die erste Brennlinie $Q_1 b_1$ gebogen sein und ihre Convexität nach rechts oben kehren. Die Figuren 4 und 5 sind körperlich zu verstehen, so dass die Punkte $b b_1$ und b_2 vor der Ebene des Papiers liegen, ebenso wie die durch gestrichelte Linien eingeschlossenen Flächen, welche links am weitesten vor dem Papier sich befinden und nach rechts hin allmählich der Ebene desselben näher kommen, um sie in $a_1 a a_2$ zu treffen. Nach dieser Auseinandersetzung dürfte die räumliche Auslegung der Brennstrecken in den Hauptfiguren für den Leser keine Schwierigkeit mehr haben. Um das Verständniss zu erleichtern, sind noch mehrfach schematische Darstellungen der Brennfiguren einzelner Bündel beigefügt; so ist auf den Tafeln IV und V die Fig. 2 jedesmal eine schematische Ausführung der Brennfigur des 70°-Bündels der Hauptfigur.

Wenn die brechenden Flächen einen grösseren Abschnitt der betreffenden Kugeloberfläche ausmachen, das heisst wenn die Linsen einen grösseren Axendurchmesser haben, dann findet man auch bei schiefem Strahleneinfall annähernd die ganze Brennfigur, wie sie in den Figuren 3 und 4 Tafel VI abgebildet ist. Dies ist z. B. der Fall bei den 70°-Bündeln der Rinds- und Schweinslinse Taf. IV und V.

Bei beschränkteren brechenden Flächen ist aber für schiefe Strahlenbündel nur ein Theil der Aberrationsfigur vorhanden, z. B. nur der eine Schenkel $b_5 b_4 b_3 b_0$ (Fig. 3 Taf. VI) der äusseren und der entsprechende der inneren Caustica. Ein solches Verhalten trifft man bei den flachen Linsen an: Taf. II Fig. 3, Taf. III, Taf. VI Fig. 1.

Wir treten jetzt den Verschiedenheiten näher, welche den einzelnen Linsenformen bezüglich ihrer Aberrationsverhältnisse eigenthümlich sind, und haben dabei auch die Frage zu berücksichtigen, welche Linsenform für die günstigste, d. h. am meisten homocentrische Brechung schiefer Strahlen, die besten Bedingungen aufweist. Wie wir oben gesehen haben, zerfällt die Aberration schiefer Bündel in zwei Theilerscheinungen: die eigentliche Aberration und die Astigmasie. Von den Autoren wurde bisher die letztere, welche in der Länge der Brennstrecke zum Ausdruck kommt, vorzugsweise berücksichtigt und daraus ein Urtheil über den Grad der Homocentricität, welche die Brechung schiefer Strahlen in den betreffenden Linsen zeigt, abgeleitet. Dies ist nicht zulässig. Noch ungenügender gestaltet sich die Begründung des Urtheils, wenn auch die Astigmasie nur an einer Strahlengattung, dem Centralstrahl, berechnet, an den übrigen aber gänzlich ausser Acht gelassen wird.

Die Brennfiguren fallen bei den verschiedenen Linsenformen sehr abweichend von einander aus. Man kann zwei Typen unterscheiden, den der dicken und den der flachen Linsen. Zu dem ersteren gehören von den Hauptfiguren ausser der Kugellinse die Rinds- und Schweinslinse. Die übrigen zeigen den Typus der flachen Linsen. Bei den ersteren liegt der Radialstrahl zwischen Central- und Scheitelstrahl, bei den letzteren ist der Scheitelstrahl der mittlere.

In beifolgender Tabelle VII sind die Zahlen, welche die Lage und Länge der Brennstrecken angeben, von vier Linsen zusammengestellt. Es repräsentiren die Rinds- und Schweinslinse den dicken, die Menschenlinse und eine biconvexe Glaslinse den flachen Typus. Wir berücksichtigen bei allen asymmetrischen Linsen zunächst nur diejenige Lage, in welcher die weniger gekrümmte Fläche nach vorn, dem einfallenden Lichte zu, gerichtet ist. Unter „günstigstem Strahl“ wollen wir das unendlich dünne Bündel verstehen, welches am meisten homocentrisch gebrochen wird.

Tabelle VII.

Homogene ideale Rindslinse.

70°	λ_1 [1]	I	II	B
Central	70°	3·8	7·0	3·2
Radial	42° 24	2·9	6·2	3·3
Scheitel	33° 52	2·2	5·8	3·6
60°				
Central	60°	4·8	7·5	2·7
Radial	37° 40	4·5	7·0	2·5
Scheitel	30° 42	3·8	6·7	2·9
50°				
Central	50°	5·8	8·0	2·1
Radial	32° 21	5·9	7·7	1·8
Scheitel	26° 43	5·3	7·5	2·2
Lateral	23° 52	5·1	7·5	2·4

(n = 1·54, r = 14, ϱ = 10, d = 12, f = 9·171)

Homog. ideale Schweinslinse.

λ_1	I	II	B
70°	4·4	7·6	3·2
44° 27	2·9	6·6	3·7
32° 20	1·8	5·9	4·1
60°	5·6	8·2	2·6
39° 13	4·9	7·7	2·8
29° 9	3·9	6·9	3·3
50°	6·4	8·6	2·2
33° 25	6·4	8·2	1·8
25° 35	5·2	7·8	2·6

(n = 1·54, r = 7·5, ϱ = 5·5, d = 7, f = 4·873)

Homog. ideale Menschenlinse.

70°	λ_1	I	II	B
Central	70°	1·5	5·5	4·0
Scheitel	47° 14	3·3	5·9	2·6
Radial	33° 30	3·1	5·6	2·5
60°				
Central	60°	2·7	6·2	3·5
Scheitel	43° 22	4·2	6·4	2·2
Radial	30° 33	4·1	6·3	2·2
50°				
Central	50°	3·7	6·7	3·0
Scheitel	37° 44	5·2	6·9	1·7
Radial	28° 19	5·1	6·8	1·7

(n = 1·438, r = 10, ϱ = 6, d = 3·6, f = 8·2075)

Homogene Biconvexlinse.

λ_1	I	II	B
70°	1·0	4·6	3·6
51° 46	2·1	4·6	2·5
23°	2·5	4·4	1·9
60°	1·8	5·2	3·4
46° 51	2·9	5·3	2·4
22° 21	3·1	5·0	1·9
50°	2·9	5·8	2·9
40° 41	3·8	5·8	2·0
20° 47	3·9	5·6	1·7

(n = 1·55, r = 8·5, d = 3, f = 7·21)

In einer vollständig kugeligen Linse werden die Centralstrahlen ganz homocentrisch gebrochen, in einer planconvexen Linse, welche die flache Seite dem Licht zukehrt, dagegen die durch den Krümmungsmittelpunkt der Hinterfläche gehenden Radialstrahlen, während die Centralstrahlen sehr lange Brennstrecken besitzen. Letzterer Umstand veranlasste Hermann[2]) zu dem Ausspruch, die menschliche Linse sei im Auge ungünstig gelagert, weil sie die flachere Seite dem Licht zukehre. Diese Meinung findet ihre Erklärung darin, dass nur die Centralstrahlen berücksichtigt wurden, welche in der That an der flacheren Seite kürzere Brennstrecken aufweisen würden, als an der gekrümmteren. Die alleinige Beachtung der Centralstrahlen war auch die Ursache, weshalb Hermann einen kugeligen Kern postulirte.

Nun steht es aber von vornherein keineswegs fest, dass die Centralstrahlen für das menschliche Auge die wichtigsten sind, die Wahrscheinlichkeit spricht mehr für die in der Mitte der Pupille eintretenden Scheitel- und Radialstrahlen.

Eine leichte Ueberlegung zeigt sofort, dass die Radialstrahlen in einer planconvexen Linse in der That homocentrisch gebrochen werden müssen. Wenn es der Natur darauf ankäme, für schiefe Strahlenbündel homocentrische Brechung zu erzielen, so hätte sie dies gerade dadurch erreichen können, wenn sie die Vorderfläche der menschlichen Linse noch flacher gemacht hätte. Auch der mathematische Beweis hierfür ist leicht zu liefern.

Setzt man

$$\zeta = \mathrm{n} \cos \psi - \cos \varphi$$

$$\chi = (\mathrm{r} + \varrho - \mathrm{d}) \frac{\sin(\lambda - \varphi)}{\sin \psi},$$

so erhält man für die Brennstrecke an den Radialstrahlen folgenden Ausdruck:

$$\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1 = \varrho \left[\frac{\mathrm{nr} - \zeta(\varrho + \chi)}{\mathrm{n}\varrho\zeta + (\mathrm{n} - 1)\left[\mathrm{nr} - \zeta(\varrho + \chi)\right]} - \frac{\mathrm{nr}\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)}{\mathrm{n}\varrho\zeta + (\mathrm{n} - 1)\left[\mathrm{nr}\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)\right]} \right].$$

Lässt man den Radius der Vorderfläche $\mathrm{r} = \infty$ werden, so folgt $\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1 = 0$.

Es ergiebt sich daher, dass im Gegentheil die Lagerung der thierischen Linse im Auge mit Rücksicht auf die Länge der Brennstrecke als eine günstige bezeichnet werden muss, da eben nicht allein die Centralstrahlen, sondern im Gegentheil hauptsächlich die Scheitel- und Radialstrahlen in Frage kommen.

Zwischen diesen beiden Extremen, nämlich der kugeligen und der Planconvex-Linse, finden wir alle denkbaren Zwischenstufen. Während noch bei der der Kugel am nächsten stehenden homogenen Schweinslinse der Centralstrahl für das 70°- und 60°-Bündel die günstigsten Verhältnisse zeigt und erst

[1]) λ_1 ist der Winkel, welchen der austretende Strahl mit der Axe bildet.

[2]) Hermann, Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystalllinse. Zürich 1874. S. 16 u. S. 23.

beim 50°-Bündel der Radialstrahl etwas günstiger wird, ist bei der Rindslinse nur für das 70°-Bündel der Centralstrahl günstiger.

Im Ganzen sind aber die Unterschiede bezüglich Länge und Lage der Brennstrecke an Central- und Radialstrahlen für die dicken homogenen Linsen nur sehr geringfügig. Dagegen sind an den flachen Linsen die Radial- und Scheitelstrahlen die bei weitem günstigsten, die Centralstrahlen sehr viel ungünstiger. Und zwar weisen die Radialstrahlen an flachen und dicken Linsen nur unbedeutende Unterschiede auf.

Was das Charakteristische der Brechung in flachen Linsen einerseits, in den dicken andererseits ausmacht, ist somit, dass die flachen Linsen die Radialstrahlen nahezu gleich, die Centralstrahlen aber sehr viel ungünstiger brechen, als die dicken Linsen. Die erste Brennlinie kommt der Hinterfläche näher zu liegen und dadurch erhält die Brennstrecke grössere Ausdehnung.

Ordnen wir die Linsen in einer Reihe, so kommt der Kugel zunächst zu stehen die Schweinslinse, darauf folgen Rinds- und Menschenlinse, dann die symmetrische biconvexe, endlich die planconvexe Glaslinse.

Die eigentliche Aberration angehend, greifen wir zurück auf das oben über Caustica secundaria, Evolventen und Evoluten Gesagte. Wir sahen, dass die Caustica externa der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Caustica secundaria ist, und dass die Brechung homocentrisch wird, sobald diese letztere ein Kreis ist. Die Krümmungsmittelpunkte sind identisch mit den ersten Brennlinien. Daraus folgt unmittelbar, dass die sphärische Aberration um so stärker ist, je weiter die Krümmungsmittelpunkte oder, was dasselbe ist, die ersten Brennlinien auseinander liegen, d. h. je länger die Caustica externa ist. In den Hauptfiguren ist die Caustica secundaria je nach der ersten und zweiten Brechung durch punktirte Linien angedeutet.

Am längsten ist die Caustica externa an der planconvexen Linse, darauf folgen die biconvexe und die menschliche Linse, dann erst Rinds- und Schweinslinse.

Auf den ersten Blick erkennt man, dass im Allgemeinen an den flachen Linsen die Brennlinien viel weiter auseinander liegen. Besonders ist die Brennlinie der Centralstrahlen weit von den übrigen abgerückt. Für diese Linsen sind also die Aberrationsverhältnisse bedeutend ungünstiger. Von der Form der menschlichen Linse gilt dies nicht in demselben Grade, wie von den übrigen flachen Linsen, namentlich liegen die Brennlinien der in der Mitte der Vorderfläche eintretenden Strahlen dicht nebeneinander, während allerdings die des Centralstrahles weit entfernt ist.

Weshalb kann nun die Natur trotz der scheinbar ungünstigen Bedingungen der flachen Linsen eine solche Form für das menschliche Auge, statt wie bei den thierischen eine mehr kugelige, gewählt haben? Zweifellos ist die Nothwendigkeit, eine starke Accommodation für das centrale Sehen zu ermöglichen, der Hauptgrund gewesen. Eine mehr oder weniger kugelige Linse kann nur sehr geringe Accommodationsbreite gewähren. Auch ein stark brechender kugeliger Kern würde das Accommodationsvermögen verringern. Die Fragestellung ist dahin abzuändern: Hat die Natur aus Rücksicht auf die Bedürfnisse des centralen Sehens das scheinbar ungünstigere Verhältniss für das periphere Sehen als unvermeidliches Uebel mit in den Kauf genommen, oder sind die Aberrationsverhältnisse bei der flachen Linse nur scheinbar ungünstige, in Wirklichkeit aber den Zwecken des peripheren Sehens gemäss?

Soll die Aberration schräger Bündel sich verringern, so muss zunächst die Caustica secundaria immer mehr die Gestalt eines Kreises annehmen. Dann schrumpft die Caustica externa allmählich zusammen und wird schliesslich zu einem Punkt, dem Centrum des Kreises, welcher nun die Caustica secundaria bildet. Sobald Taf. I Fig. 1 die Caustica secundaria, C. s. II, die Form des Kreises ψ angenommen hat — was natürlich nur in Folge von Krümmungsänderung der brechenden Flächen oder von Verminderung des Brechungsindex längs derselben geschieht —, dann fallen alle Krümmungsmittelpunkte im Hauptbrennpunkte F zusammen. Wenn es sich um paraxiale Brechung an Rotationsflächen handelt, so ist damit die ganze Frage erledigt, die Brechung ist vollständig homocentrisch.

Da nach der Brechung an einer zweiten Fläche das Brenngebilde eines schiefen Bündels nicht durch Rotation der Brennfigur entsteht, so kann man hier obige Betrachtungsweise nur auf die Brechung in der Einfallsebene (im horizontalen Meridian) anwenden. Wird die Caustica secundaria kreisförmig, so fallen sämmtliche erste Brennlinien zusammen. Die Fig. 4 Taf. VI verwandelt sich in die Fig. 6 derselben Tafel. Das ganze dicke Bündel zeigt dieselbe Astigmasie wie ein einzelnes dünnes Bündel. Die Aenderung der Brechung im vertikalen Meridian, welche nothwendig wäre, um auch diese Astigmasie zu beseitigen, erfordert eine gesonderte Betrachtung.

Zur Klarstellung der eben besprochenen Punkte muss ich auf die Fig. 8 eingehen, welche die Copie einer Figur Matthiessen's[1]) ist und die Anschauungen dieses Forschers über die theilweise Correction der Aberration bei schiefen Bündeln im Auge wiedergiebt. Die einzelnen dünnen Bündel sollen ihre ersten Brennlinien getrennt in $b_1 b_2 b_3$ haben, ihre Brennstrecken sich dagegen an einer Stelle $\alpha \cdot \beta$ schneiden, so dass hier, wenn auch kein scharfes, so doch brauchbares Bild zu Stande käme. Natürlich müssen auch die Brennstrecken aller dazwischen liegenden Bündel durch $\alpha\beta$ gehen. Eine solche Brennfigur wäre aber nur bei facettirten Medien, nicht bei continuirlichen möglich. Denn, sollen die drei von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ausgehenden Strahlen sich in α schneiden, so muss Krümmung oder Index von α_2 nach α_3 und α_1 hin abnehmen. Ebenso muss aber auch Krümmung oder Index von β_2 nach β_1 und β_3 hin abnehmen, damit die drei anderen Strahlen sich in β treffen können. Auf der Strecke $\alpha_2 \beta_2$ müsste somit Krümmung oder Index in derselben Richtung gleichzeitig zu- und abnehmen, was nicht möglich.

Auch mathematisch lässt sich die Unmöglichkeit einer derartigen Brennfigur zeigen. Die Strahlen sind, wie wir gesehen haben, sämmtlich Tangenten an der jedesmaligen Caustica externa. Diese wird zusammengesetzt aus den ersten Brennlinien und muss also auch durch $b_1 b_2 b_3$ gehen. Man müsste daher durch die Punkte α und β Tangenten an jeden Punkt der Caustica ziehen können, was wiederum nicht möglich ist, ausgenommen wenn die Caustica externa zu einem Punkt wird; dieser Fall ist in Fig. 6 vorgesehen. Wenn die Figur 8 die Brennfigur eines continuirlichen brechenden Mediums sein soll, so muss mindestens eine der Brennlinien jenseits $\alpha\beta$ liegen, aus der Fig. 8 also entweder die Fig. 4 oder die Fig. 5 werden, oder endlich alle ersten Brennlinien, d. h. die Punkte $b_1 b_2 b_3$ sowohl, als die Punkte α und β müssen zusammenfallen, wie in der Fig. 6.

Es erübrigt noch die verhältnissmässige Länge der Brennlinien zu kennen. Nehmen wir an, die einzelnen dünnen Bündel hätten alle gleichen Querschnitt, und vergegenwärtigen wir uns, dass die ersten Brennlinien zwischen den zu den zweiten Brennlinien convergirenden Strahlen liegen, so folgt, dass die ersten Brennlinien desto länger sein müssen, je näher sie sich der Hinterfläche der Linse befinden. Die erste Brennlinie des Centralstrahles Fig. 1 Taf. VI ist länger, als diejenigen des Radial- und Scheitelstrahles. In Fig. 5 würde $Q_1 b_1$ kürzer als $Q_2 b_2$ und diese wieder kürzer als $Q_3 b_3$ sein.

Die ersten und zweiten Brennlinien verhalten sich zu einander wie ihre Entfernungen von der Hinterfläche. Am Centralstrahl 70° z. B. Fig. 1 Taf. VI verhält sich die erste Brennlinie zur zweiten $= 1 : 3$, am Radialstrahl $= 2 : 3$.

Denken wir uns ein Bündel von kreisförmigem Querschnitt, welches auf dem Längsschnitt begränzt erscheint, durch den Scheitelstrahl einerseits und den Radialstrahl andererseits des 70°-Bündels Fig. 1 Taf. VI, so wäre die Länge der zweiten Brennlinie dieses Bündels II II — III III $= 7 \cdot 5$ mm, während die erste bei II, III eine etwas geringere Höhe, nämlich $5 \cdot 0$ mm, messen würde.

Die ersten Brennlinien sind mithin immer kürzer als die zweiten; jedoch kommen sie ihnen an Länge nahe und dürfen bei Beurtheilung der Zerstreuungsfiguren nicht ausser Acht gelassen werden.

Das Brenngebilde, welches wir vorläufig bei allen Brechungen als thatsächlich vorhanden hingestellt haben, ist bezüglich seiner Gestalt einem allgemeinen Gesetz unterworfen, welches sich aus dem bekannten Malus'schen Theorem ergiebt. Im nächsten Abschnitte kommen wir noch einmal auf die allgemeine Form des Brenngebildes zurück.

[1]) Archiv für Ophthalmologie. Bd. XXV. 4. S. 274.

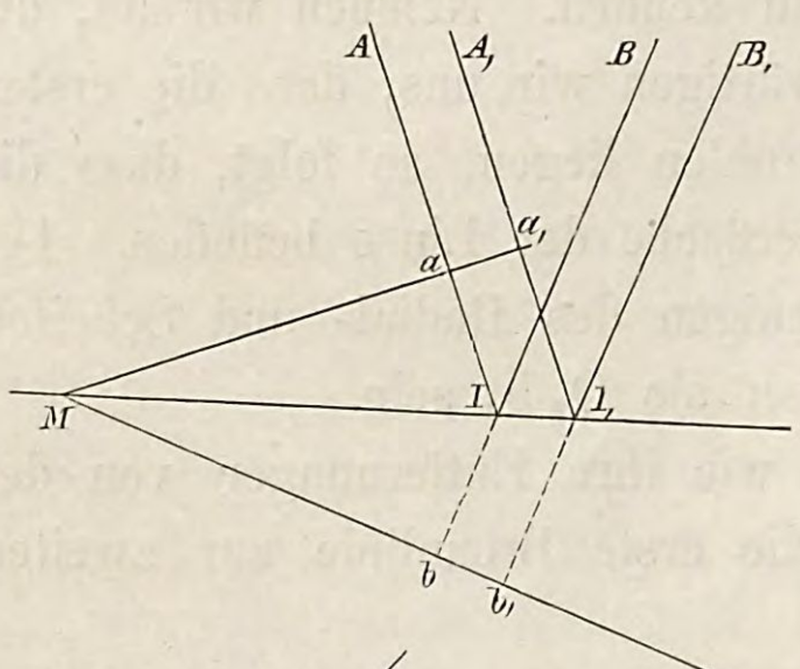
B. Mathematische Ableitung der Brechungsgesetze.

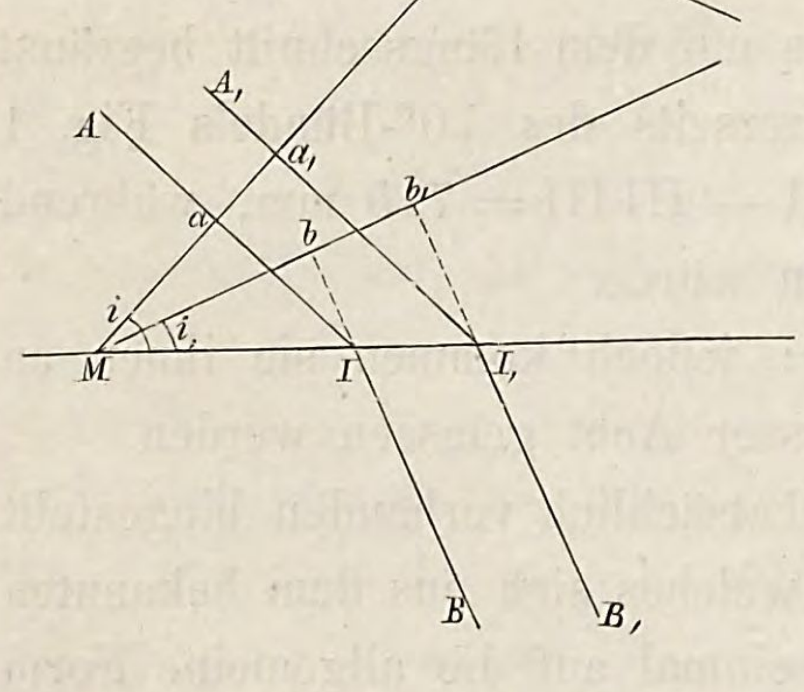
10. Das Malus-Dupin'sche Gesetz.

Nachdem Tschirnhausen 1682 eine Gleichung für die Caustica in einem Kreise reflektirter ursprünglich paralleler Strahlen zu geben gesucht hatte, folgten ihm auf diesem Gebiete Cassini, Mariotte de la Hire, Bernoulli, l'Hôpital, Carré und andere. Doch erst Malus (1810) fasste die Frage allgemein. Die von ihm aufgestellten Sätze, in einer von Dupin modificirten Gestalt, bilden die Grundlage der geometrischen Optik. Malus war zu denselben mittelst einer sehr verwickelten analytischen Ableitung gelangt, die Bemühungen von Dupin, Timmermans, Gergonne, Sturm und Quetelet setzten an deren Stelle eine ungemein einfache geometrische Demonstration. Dupin fand eine solche zuerst für reflektirte Strahlen, Timmermans machte davon Anwendung auf an ebener Trennungsfläche gebrochene Strahlen, Gergonne und Quetelet verallgemeinerten die Demonstration, so dass sie für Refraction und Reflexion und jede beliebige Trennungsfläche Gültigkeit erhielt.

Wir betrachten den Gang von Lichtstrahlen, welche von einem Leuchtpunkte ausgehen und beliebige Spiegelungen und Brechungen erfahren. Der Malus'sche Satz besagt: Sind Strahlen ursprünglich senkrecht zu einer beliebigen Fläche, so stehen sie auch nach der Reflexion oder Refraction wiederum senkrecht zu einer zweiten Fläche. Dupin fügte hinzu, dass die Zahl der Refractionen oder Reflexionen eine beliebige sein kann und trotzdem die ursprünglich zu einer Fläche senkrechten Strahlen auch nach dem Eintritt in das letzte Medium wiederum zu einer Fläche normal sind. Gergonne zeigte, dass bei Strahlen, die ursprünglich zu einer beliebigen Fläche senkrecht stehen und eine beliebige Anzahl von Refractionen und Reflexionen durchmachen, das Schlussergebniss durch eine einzige Refraction oder Reflexion ausgedrückt werden kann.

Fig. 1.





Die Richtigkeit des Malus'schen Satzes für parallele Strahlen und eine ebene brechende oder spiegelnde Fläche ergiebt sich ohne Weiteres. Sei MII_1 eine solche Trennungsfläche, AA_1 das einfallende, BB_1 das reflektirte, beziehentlich gebrochene Bündel. Fällen wir von M die Senkrechte Maa_1 und beschreiben wir um die Incidenzpunkte I und I_1 mit Ia beziehentlich I_1a_1 Kugeln, so schneiden die Kugeln die reflektirten Strahlen in bb_1, welche in einer Geraden, der von M an den Kugeln gezogenen Tangente liegen. Für die Brechung ist aMI der Einfallswinkel, bMI der Brechungswinkel; bezeichnen wir sie mit i und i_1. Es ist

$$MI = aI : \sin i = bI \cdot \sin i_1$$

$$aI : bI = n \quad \cdot \quad \text{oder} \quad aI = nbI$$

ebenso $\quad a_1I_1 : b_1I_1 = n \quad \cdot \quad \text{oder} \quad a_1I_1 = nb_1I_1.$

Werden parallele Strahlen an einer ebenen Trennungsfläche gebrochen und beschreibt man um die Einfallspunkte Kugeln, welche eine Normalebene der einfallenden Strahlen berühren und andere mit jenen concentrische Kugeln, deren Radien zu denen der ersteren in einem bestimmten Verhältniss (n : 1) stehen, so werden die letzteren Kugeln von einer Normalebene berührt, welche zu den gebrochenen Strahlen beziehentlich deren Verlängerungen senkrecht steht.

Dieser Satz, unter welchen auch die Reflexion mit einbegriffen ($n = -1$), ist einer bedeutenden Erweiterung fähig. Zu einem allgemein gültigen Theorem gelangt man durch folgende Betrachtungen.

Gegeben sind zwei beliebig gekrümmte Flächen, in beliebiger Lage zu einander, aber im Raum festliegend. Wir denken uns zwei concentrische Kugeln, beweglich und mit veränderlichen Radien, — jedoch veränderlich nur in der Weise, dass das Verhältniss der Radien je zweier concentrischer Kugeln constant bleibt, — sich so im Raum bewegen, dass die eine Kugel stets die eine, die zweite stets die andere Fläche tangirt und auf derselben rollt, indem sich die Radien nach Bedürfniss verlängern oder verkürzen, aber immer unter Wahrung desselben Verhältnisses. Der Mittelpunkt der beiden concentrischen Kugeln wird eine dritte Oberfläche beschreiben. Es handelt sich darum, die Beziehungen dieser Oberfläche zu den beiden anderen zu ermitteln.

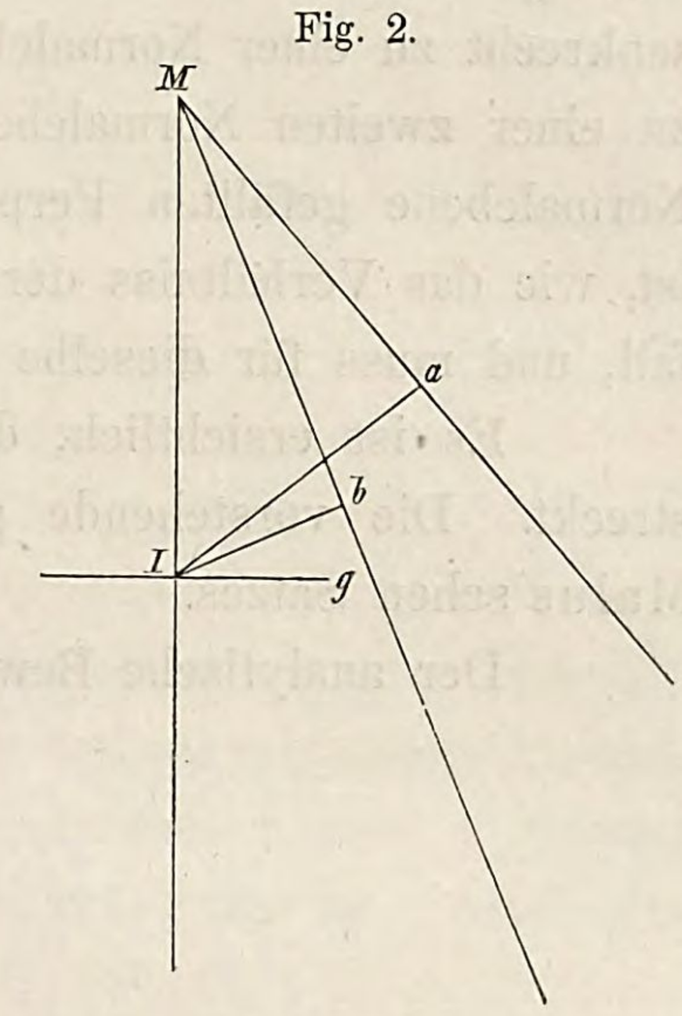
Nehmen wir zunächst an, die beiden Flächen seien ebene Flächen, und bezeichnen wir sie mit $p\,p_1$. Die dritte Fläche S muss dann auch, wie leicht ersichtlich, eine ebene sein. Es sei für eine bestimmte Lage der Kugeln I der Mittelpunkt derselben, a und b die Punkte, in welchen sie die Flächen berühren, so dass I a und I b die Radien sind und im Verhältniss $= n : 1$ zu einander stehen. Die Flächen p und p_1 schneiden sich in einer Geraden k. Wir legen durch k und den Mittelpunkt I eine Ebene P. Auf derselben sei I_1 ein beliebiger Punkt und $I_1 a_1$ und $I_1 b_1$ die von demselben auf die Ebenen p und p_1 gefällten Perpendikel. Diese Perpendikel sind also parallel zu I a und I b, welche nach der Voraussetzung auf den Flächen senkrecht stehen. Man verbindet I mit I_1 und verlängert diese Linie, bis sie die Linie k im Punkte M trifft. Man hat dann wie oben:

$$\frac{M\,I}{M\,I_1} = \frac{I\,b}{I_1\,b_1} = \frac{I\,a}{I_1\,a_1}$$

$$\frac{I_1\,a_1}{I_1\,b_1} = \frac{I\,a}{I\,b} = \frac{\sin i}{\sin i_1} = n$$

I_1 ist somit auch der Mittelpunkt zweier solcher concentrischer Kugeln. Daraus folgt, dass alle Punkte der Fläche P derartige Mittelpunkte sind.

Fig. 2.



Nehmen wir jetzt an, die beiden festen Normalflächen s und s_1 seien beliebig gekrümmt. Mit S bezeichnen wir die unbekannte Fläche, welche der Ort der Kugelcentren ist. Es seien a und b wiederum die Berührungspunkte zweier Kugeln mit den beiden Flächen. Lassen wir eine unendlich kleine Verschiebung des Kugelcentrums unter entsprechender Veränderung der Radien eintreten, so können wir an Stelle der Oberflächen s und s_1 ihre Tangentialebenen p und p_1 setzen. Der gemeinsame Mittelpunkt I liegt dann, wie oben gezeigt, auf einer ebenen Fläche P, welche durch die Schnittlinien k der Flächen p und p_1 geht. Also schneiden sich bei jeder Lage des gemeinschaftlichen Kugelcentrums die Tangentialebenen P, p, p_1, an den Oberflächen S, s, s_1, in den Punkten I, a, b, immer in einer einzigen Geraden, deren Lage mit derjenigen von I wechselt. Legen wir durch I eine Fläche Q senkrecht zu der Geraden, so steht die Fläche auch senkrecht zu den drei Ebenen und liegen in ihr die beiden von I nach den Berührungspunkten a, b der Kugeln mit den Flächen s, s_1, oder p, p_1, gezogenen und auf diesen Flächen senkrecht stehenden Radien I a und I b. Ebenso liegt in der Ebene Q eine in I zu der Fläche P, welche die Tangentialebene der Fläche S ist, errichtete Senkrechte I g.

Es folgt wiederum:
$$I\,M = \frac{I\,a}{\sin I\,M\,a} = \frac{I\,a}{\sin a\,I\,g} = \frac{I\,b}{\sin I\,M\,g} = \frac{I\,b}{\sin b\,I\,g}$$

$$\frac{\sin a\,I\,g}{\sin b\,I\,g} = \frac{I\,a}{I\,b} = \frac{n}{1}.$$

Da nun das Verhältniss der Radien für alle Punkte I der Oberfläche S dasselbe ist, so ist die obige Darlegung für die ganze Fläche S gültig. Man kann die Oberfläche, welche der Ort der Mittelpunkte der beiden Kugelsysteme ist, folgendermassen charakterisiren:

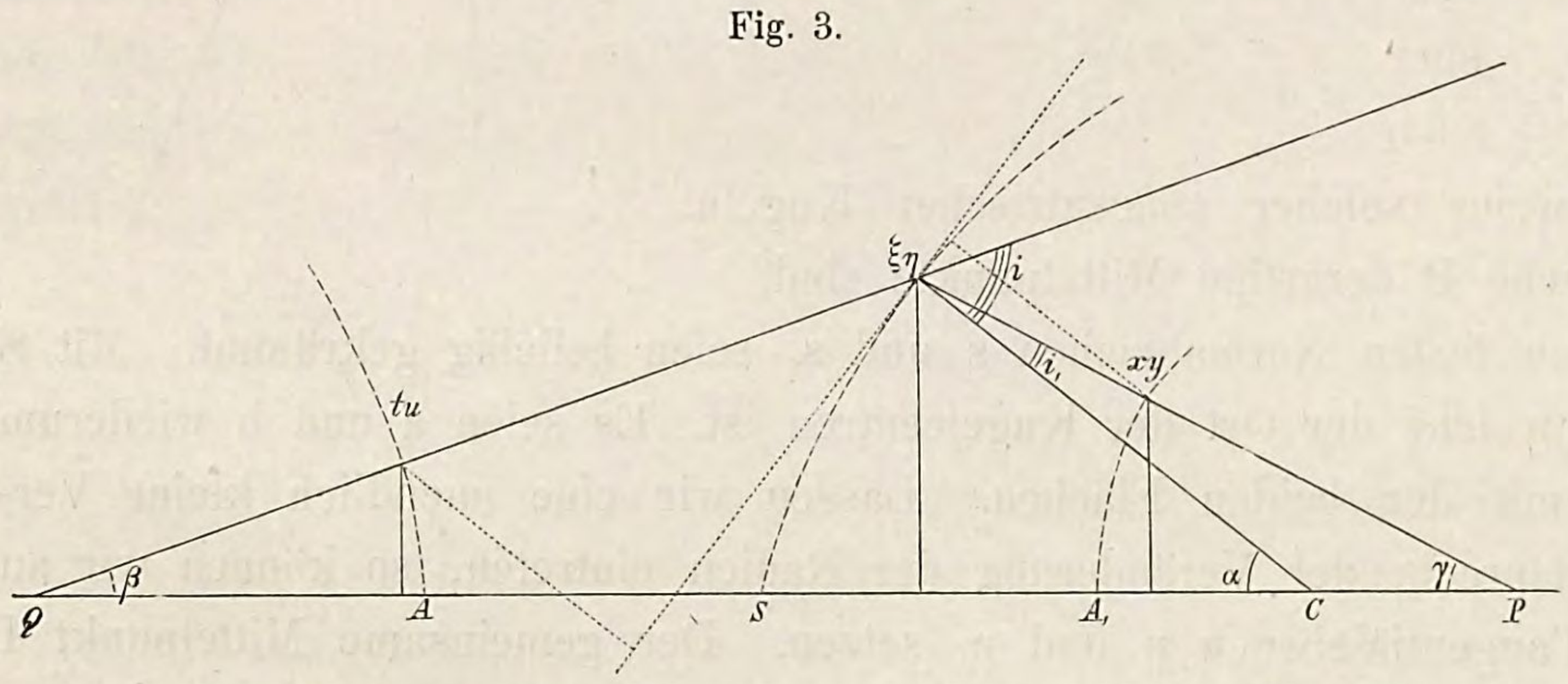
Wenn zwei concentrische Kugeln, die beweglich im Raum sind und einen veränderlichen Radius haben, deren Radien aber immer in einem constanten Verhältniss zu einander stehen, sich so bewegen, dass jede stets eine von zwei beliebig gegebenen festen Oberflächen tangirt, dann ist der Ort ihres gemeinsamen Centrums eine dritte Oberfläche, die so beschaffen ist, dass die Senkrechten, welche von einem beliebigen Punkt derselben auf die beiden anderen Flächen gefällt werden, immer in einer Ebene mit der Normalen liegen, welche in demselben Punkt senkrecht zu der Fläche errichtet wird, die der geometrische Ort der Kugelcentren ist. Ausserdem stehen die Sinus der Winkel zwischen den beiden ersten Normalen und der dritten in demselben constanten Verhältniss wie die Radien der Kugeln.

Wenn man nun annimmt, die Oberfläche S trenne zwei Medien von einander, deren Brechungsindices in dem Verhältniss der Radien der concentrischen Kugeln zu einander stehen, und sind die einfallenden Strahlen normal zu einer Oberfläche s, so werden die gebrochenen normal zu einer anderen Oberfläche s_1 sein. Wir haben folgenden Satz: Werden zwei homogene Mittel von verschiedenem Brechungsvermögen durch eine beliebige Oberfläche von einander geschieden, und sind die einfallenden Strahlen senkrecht zu einer Normalebene, so sind nach der Brechung die austretenden Strahlen wiederum senkrecht zu einer zweiten Normalebene. Ausserdem stehen die von einem Punkte der brechenden Fläche auf die Normalebene gefällten Perpendikel in einem constanten Längenverhältniss zu einander, welches dasselbe ist, wie das Verhältniss der Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels. Die Reflexion ist nur ein Specialfall, und muss für dieselbe der Index $n = -1$ gesetzt werden.

Es ist ersichtlich, dass sich die Gültigkeit des Satzes auf eine beliebige Anzahl von Medien erstreckt. Die vorstehende geometrische Demonstration liefert einen vollständigen Beweis des wichtigen Malus'schen Satzes.

Der analytische Beweis soll zuerst für die Ebene, dann für den Raum geführt werden. Die Curve S trenne zwei Medien, deren Brechungsindices sich verhalten $= \frac{m}{n}$. In derselben Ebene befinde sich eine zweite Curve A, von deren sämmtlichen Punkten Strahlen normal zu der Curve A selbst ausstrahlen. Es seien, auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, die Gleichungen der Curven S und A:

Fig. 3.



$$\varphi(\xi\eta) = V = 0 \qquad 1.$$

$$f(tu) = V_1 = 0 \qquad 2.$$

Wir setzen $\frac{d\eta}{d\xi} = p$ und $\frac{du}{dt} = q$, X, Y seien die laufenden Coordinaten. Wir schreiben die Gleichungen des einfallenden Strahles der Normalen und des gebrochenen Strahles hin.

$$Y - \eta = -\frac{1}{q}(X - \xi) \qquad 3.$$

$$Y - \eta = \frac{y - \eta}{x - \xi}(X - \xi) \qquad 4.$$

$$Y - \eta = -\frac{1}{p}(X - \xi) \qquad 5.$$

Wir haben:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{\frac{tg\, i}{\sqrt{1 + tg^2 i}}}{\frac{tg\, i_1}{\sqrt{1 + tg^2 i_1}}}$$

$$\sphericalangle i = \sphericalangle \alpha + \beta, \ \sphericalangle i_1 = \sphericalangle \alpha - \gamma$$

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)^2 + (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}} = \frac{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}} = \frac{q-p}{\sqrt{(1+q^2)(1+p^2)}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} i_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i_1}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha-\gamma)}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)^2+(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\gamma)^2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\gamma}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} i_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i_1}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\gamma)}} = \frac{\frac{1}{q}+\frac{y-\eta}{x-\xi}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\frac{\left[(y-\eta)^2+(x-\xi)^2\right]}{(y-\eta)^2}}} = \frac{(x-\xi)+q(y-\eta)}{\sqrt{(1+q^2)\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]}}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{q-p}{\sqrt{1+p^2}} \times \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{(x-\xi)+q(y-\eta)}$$

Nun ist
$$\frac{\eta-u}{\xi-t} = -\frac{1}{p} \text{ oder } p = -\frac{\xi-t}{\eta-u} \qquad 6.$$

$$\frac{m}{n} = \frac{q(\eta-u)+(\xi-t)}{\sqrt{(\eta-u)^2+(\xi-t)^2}} \times \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{(x-\xi)+q(y-\eta)} \qquad 7.$$

Nimmt man nun für u und t beliebige Werthe an und bestimmt die entsprechenden p, q, ξ und η nach den Gleichungen 1 bis 6, so sind in der Gleichung 7 nur noch x und y unbekannt, deren Verhältniss zu einander durch die Gleichung 7 fixirt ist. Man kann somit eine der Grössen x oder y beliebig annehmen oder, was dasselbe ist, die Gleichung 7 in zwei andere zerlegen, welche dann die Coordinaten eines bestimmten Punktes x, y geben.

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = \frac{n^2}{m^2}\left[(\eta-u)^2+(\xi-t)^2\right] \qquad 8.$$

$$(x-\xi)+q(y-\eta) = \frac{n^2}{m^2}\left[q(\eta-u)+(\xi-t)\right] \qquad 9.$$

Dividirt man 8 durch 9, so erhält man wiederum die Gleichung 7. Die Gleichung 8 ist die eines Kreises mit der Grösse rechts als Radius. Auf der Peripherie dieses Kreises muss der gesuchte Punkt x, y liegen, durch welchen der gebrochene Strahl geht und welcher dem Punkt t, u entspricht. Denkt man sich nun einen zweiten solchen Kreis, dessen Mittelpunkt dem Punkt $\xi\eta$ unendlich nahe auf der Curve S gelegen ist, d. h. differenzirt man die Gleichung 8 nach ξ, indem man t, u und η als von der unabhängigen Variabelen ξ abhängige Functionen, x und y als Constanten betrachtet, so erhält man die Gleichung

$$(x-\xi)+q(y-\eta) = \frac{n^2}{m^2}\left[q(\eta-u)+(\xi-t)\right] \qquad 10.$$

für den Durchschnittspunkt zweier unmittelbar auf einander folgender Kreise, also eines Punktes der Einwickelnden dieser Kreise.

Die Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung 9. Folglich liegt der gesuchte Punkt in der Einwickelnden und steht der gebrochene Strahl in diesem Punkte auf der Einwickelnden senkrecht. Was zu beweisen war.

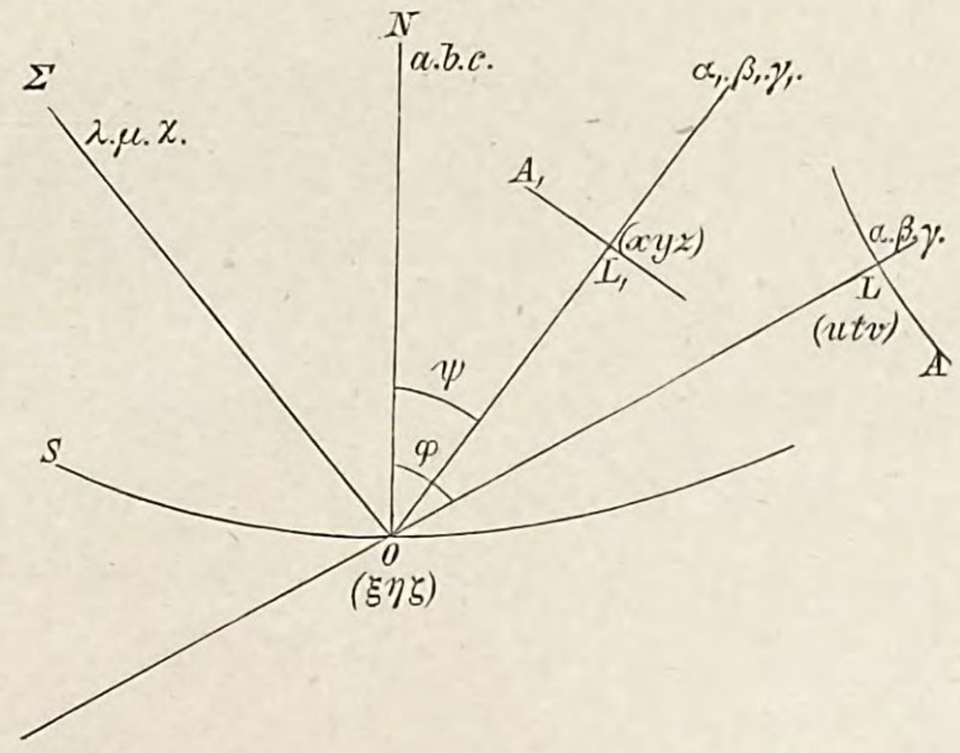
Die Grösse $(x-\xi)+q(y-\eta)$ ist der vom Punkte x, y, die Grösse $(\xi-t)+q(\eta-u)$ der vom Punkte t, u auf die in ξ, η an der Curve S gezogene Tangente gefällte Perpendikel. Daraus ergiebt sich eine leichte Methode, um durch Zeichnung die Punkte x, y zu finden, wenn die entsprechenden t, u gegeben sind.

Wenn eine beliebige Oberfläche mit veränderlichem oder nicht veränderlichem Parameter sich so bewegt, dass einer ihrer Punkte eine beliebige Leitlinie durchläuft, dann wird der Raum, welchen ihre gesammte Oberfläche durchläuft, begrenzt durch eine andere Oberfläche, welche man Einwickelnde oder Enveloppe nennt, während die erzeugende bewegliche Oberfläche Eingewickelte heisst. Jede Eingewickelte schneidet die unmittelbar folgende auf einer Curve, welche sich ganz auf der Einwickelnden befindet und die Berührungslinie der beiden Oberflächen ist.

Betrachtet man drei unendlich benachbarte Eingewickelte Kugeln, deren Centren auf einer Fläche S, aber nicht auf einer Geraden liegen, so haben die drei Kugeln zu jeder Seite der Fläche je einen Punkt gemeinsam, welcher ein Punkt der Einwickelnden ist, in welchem die drei Kugeln diese tangiren.

Für den Raum gestaltet sich der analytische Beweis, wie folgt. Es sei S eine beliebige Fläche, welche zwei verschiedene brechende Medien von einander trennt, O L ein einfallendes Strahlenbündel, O N die Normale der Fläche im Einfallspunkte O. OL_1 das gebrochene Strahlenbündel. Die Punkte L und L_1 sind beliebig angenommen. Beziehen wir diese Punkte auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem; es seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes O, u. t. v. diejenigen von L und x. y. z. diejenigen von L_1. Ferner bezeichnen wir die Richtungscosinusse der Normalen mit a. b. c., diejenigen des einfallenden Strahles mit $\alpha . \beta . \gamma .$, die des gebrochenen mit $\alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1$. Denkt man sich in O zur Ebenen N O L die Senkrechte $O\Sigma$ errichtet, so muss dieselbe auch senkrecht zu OL_1 stehen, weil Normale, einfallender und gebrochener Strahl in einer Ebene liegen. Die

Fig. 4.



Richtungscosinus von $O\Sigma$ seien $\lambda . \mu . \chi$. Weil ΣO senkrecht zu O N und zu O L ist, erhalten wir:

1. $a\lambda + b\mu + c\chi = 0$ 2. $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\chi = 0$ 3. $\lambda^2 + \mu^2 + \chi^2 = 1$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben:

$$a\frac{\lambda}{\chi} + b\frac{\mu}{\chi} = -c \qquad \alpha\frac{\lambda}{\chi} + \beta\frac{\mu}{\chi} = -\gamma$$

$$\lambda = \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha} \cdot \chi \text{ und } \mu = \frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha} \cdot \chi \qquad 4.$$

Diese Werthe in 3 eingesetzt:

$$\chi^2 \left[\left(\frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha} \right)^2 + \left(\frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha} \right)^2 + 1 \right] = 1$$

$$\chi^2 = \frac{(a\beta - b\alpha)^2}{(b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2} = \frac{(a\beta - b\alpha)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2}$$

Da $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und $a\alpha + b\beta + c\gamma = \cos \sphericalangle LON = \cos\varphi$, so ist $\chi = \frac{a\beta - b\alpha}{\sin\varphi}$,

dann aus Gl. 4 $\mu = \frac{c\alpha - a\gamma}{\sin\varphi}$ $\lambda = \frac{b\gamma - c\beta}{\sin\varphi}$.

In gleicher Weise lassen sich $\chi \cdot \mu \cdot \lambda$ durch die Richtungscosinusse von O N und OL_1 ausdrücken, so dass folgt:

$$\chi = \frac{a\beta - b\alpha}{\sin\varphi} = \frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{\sin\psi} \qquad \mu = \frac{c\alpha - a\gamma}{\sin\varphi} = \frac{c\alpha_1 - a\gamma_1}{\sin\psi} \qquad \chi = \frac{b\gamma - c\beta}{\sin\varphi} = \frac{b\gamma_1 - c\beta_1}{\sin\psi}.$$

Ausserdem verhält sich $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{m}{n}$. Also

$$\frac{a\beta - b\alpha}{m} = \frac{a\beta_1 - b\alpha_1}{n} \qquad \frac{c\alpha - a\gamma}{m} = \frac{c\alpha_1 - a\gamma_1}{n} \qquad \frac{b\gamma - c\beta}{m} = \frac{b\gamma_1 - c\beta_1}{n}.$$

Durch je zwei dieser Gleichungen ist jedesmal die dritte gegeben. Multiplicirt man z. B. die dritte mit a, die zweite mit b und zählt sie dann zusammen, so erhält man die erste. Man erhebt die drei Gleichungen ins Quadrat und addirt sie:

$$\frac{1}{m^2}\left[(a\beta - b\alpha)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (b\gamma - c\beta)^2\right] = \frac{1}{n^2}\left[(a\beta_1 - b\alpha_1)^2 + (c\alpha_1 - a\gamma_1)^2 + (b\gamma_1 - c\beta_1)^2\right].$$

Die Grössen in den Klammern sind aber links $= \sin^2\varphi$, rechts $= \sin^2\psi$, wie wir oben sahen, so dass sich ergiebt

$$\frac{\sin\varphi}{m} = \frac{\sin\psi}{n}.$$

Die Beziehungen zwischen der Normalen und den einfallenden und gebrochenen Strahlen lassen sich daher durch zwei von den drei Gleichungen ausdrücken:

$$\frac{\beta - \frac{b}{c}\gamma}{m} = \frac{\beta_1 - \frac{b}{c}\gamma_1}{n} \qquad \frac{\alpha - \frac{a}{c}\gamma}{m} = \frac{\alpha_1 - \frac{a}{c}\gamma_1}{n} \qquad 5.$$

Bezeichnen wir O L mit l und O L_1 mit l_1, so ist

$$\alpha = \frac{u - \xi}{l}, \quad \beta = \frac{t - \eta}{l}, \quad \gamma = \frac{v - \zeta}{l} \qquad \alpha_1 = \frac{x - \xi}{l_1}, \quad \beta_1 = \frac{y - \eta}{l_1}, \quad \gamma_1 = \frac{z - \zeta}{l_1}$$

$$l^2 = (u - \xi)^2 + (t - \eta)^2 + (v - \zeta)^2 \qquad l_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ von O sind durch eine Gleichung verbunden, die diejenige der Oberfläche S ist. Die Differentialquotienten nach ζ sind $\frac{d\xi}{d\zeta} = \Xi$ und $\frac{\delta\eta}{d\zeta} = H$. Nach bekannten Formeln ist $\Xi = -\frac{a}{c}$ und $H = -\frac{b}{c}$. Setzen wir diese Werthe in Gleichung 5 ein:

$$\frac{(t - \eta) - H(v - \zeta)}{m\,l} = \frac{(y - \eta) - H(z - \zeta)}{n\,l_1} \qquad \frac{(u - \xi) - \Xi(v - \zeta)}{m\,l} = \frac{(x - \xi) - \Xi(z - \zeta)}{n\,l_1} \qquad 6.$$

Wenn nun der Punkt L beliebig angenommen worden ist, so ist der Punkt L_1 noch nicht fixirt, weil durch die vorstehenden zwei Gleichungen nur zwei Relationen zwischen den drei Coordinaten festgesetzt sind.

Nehmen wir jetzt weiter an, dass alle einfallende Strahlen senkrecht zu einer Fläche A stehen, und der Punkt L sei der Punkt, in welchem der einfallende Strahl O L die Fläche treffe, dann sind seine Coordinaten diejenigen eines Punktes der Fläche A und man erhält die Differentialquotienten: $dv = p\,du$, $dv = q\,dt$, $dp = r\,du$ u. s. w. Die Gleichungen des Strahles O L sind dann:

$$(u - \xi) + p(v - \zeta) = 0 \qquad (t - \eta) + q(v - \zeta) = 0 \qquad 7.$$

Da die beiden Gleichungen 6 die Coordinaten des Punktes L_1 nicht bestimmten, so können wir noch eine beliebige Relation zwischen denselben festsetzen:

$$\frac{1}{m}\left[\sqrt{(u - \xi)^2 + (t - \eta)^2 + (v - \zeta)^2} + C\right] = \frac{1}{n}\left[\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}\right] \qquad 8.$$

In dieser Gleichung ist C eine willkürliche Constante. Wir haben somit unter den neun Coordinaten u.t.v., $\xi.\eta.\zeta.$, x.y.z. sieben Gleichungen, nämlich die Gleichungen 6. 7. 8 und diejenigen der Flächen S und A. Eliminiren wir u.t.v. $\xi.\eta.\zeta.$, so erhalten wir eine Gleichung zwischen x.y.z., welche diejenige einer Fläche A_1, des Ortes aller Punkte L_1, ist. Um zu zeigen, dass der Strahl O L_1 zu dieser Fläche senkrecht steht, bilden wir die Differentiale $\frac{dz}{dx} = P \cdot \frac{dz}{dy} = Q$, und indem wir berücksichtigen, dass die totalen Differentialen der Flächengleichungen sind:

$$d\zeta = \Xi\,d\xi + H\,d\eta \qquad dv = p\,du + q\,dt \qquad dz = P\,dx + Q\,dy,$$

differenziren wir die Gleichung 8:

$$\frac{1}{m\,l}\left\{[(u - \xi) + p(v - \zeta)]\,du + [(t - \eta) + q(v - \zeta)]\,dt - [(u - \xi) + \Xi(v - \zeta)]\,d\xi - [(t - \eta) + H(v - \zeta)]\,d\eta\right\}$$

$$= \frac{1}{n\,l_1}\left\{[(x - \xi) + P(z - \zeta)]\,dx + [(y - \eta) + Q(z - \zeta)]\,dy - [(x - \xi) + \Xi(z - \zeta)]\,d\xi - [(y - \eta) + H(z - \zeta)]\,d\eta\right\}$$

In Folge der Gleichung 6 heben sich auf beiden Seiten das dritte und vierte Glied, das erste und zweite fällt fort auf Grund der Gleichung 7, und wir erhalten:

$$[(x-\xi)+P(z-\zeta)]\,dx = -[(y-\eta)+Q(z-\zeta)]\,dy.$$

Man kann nun annehmen, x und y seien die beiden unabhängigen Veränderlichen. Es theilt sich dann die letzte Gleichung in zwei andere:

$$(x-\xi)\,dx + P(z-\zeta)\,dx = -(y-\eta)\,dy - Q(z-\zeta)\,dy$$
$$(z-\zeta)(P\,dx + Q\,dy) + (x-\xi)\,dx + (y-\eta)\,dy = 0$$
$$(z-\zeta)\,dz + (x-\xi)\,dx + (y-\eta)\,dy = 0$$

woraus: $x-\xi+P(z-\zeta)=0 \qquad y-\eta+Q(z-\zeta)=0$ 10.

Dies sind aber die Projektionsgleichungen einer Normalen zu der Fläche xyz, mit welcher Normalen somit der gebrochene Strahl zusammenfällt. Nach der Gleichung 8 ist der gebrochene Strahl auch senkrecht zu einer Kugel, deren Gleichung ist:

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} = \frac{n}{m}(l+C), \text{ oder } l_1 = \frac{n}{m}(l+C).$$

Also ist die Oberfläche A_1 die Einwickelnde aller dieser Kugeln. Liegt der Punkt L_1 nicht auf derselben Seite der brechenden Fläche, wie der Punkt L, so folgt statt $\frac{l}{m}-\frac{l_1}{n}=C$, die Relation $\frac{l}{m}+\frac{l_1}{n}=C$.

Setzt man die Constante $=0$, so ergiebt sich: $\frac{l}{m}=\frac{l_1}{n}$.

Da man der Constante C jeden beliebigen Werth geben kann, so ist einleuchtend, dass die Zahl der Flächen A und A_1 eine unbegrenzte ist. Je zwei zusammengehörige schneiden sich auf der brechenden Fläche in einer Curve, zu welcher der einfallende und gebrochene Strahl senkrecht stehen.

Strahlen, welche von einem leuchtenden Punkte ausgehen, sind senkrecht zu allen concentrischen Kugelflächen, welche den Leuchtpunkt zum Centrum haben. Kommen die Strahlen von einem unendlich entfernten Punkte, so werden die Kugelflächen zu Ebenen, welche die parallelen Strahlen senkrecht durchsetzen. Wenn also Lichtstrahlen von einem in endlicher oder unendlicher Entfernung gelegenen Leuchtpunkte ausgehen und an einer Fläche eine Brechung erleiden, so sind sie nach derselben senkrecht zu einer Reihe von Oberflächen. Erleiden sie eine zweite Brechung, so werden sie senkrecht zu einer neuen Reihe von Flächen. Kurzum, nach einer beliebigen Anzahl von Brechungen giebt es immer wieder eine Reihe von Flächen, zu welchen die Strahlen innerhalb des letzten Mediums senkrecht stehen.

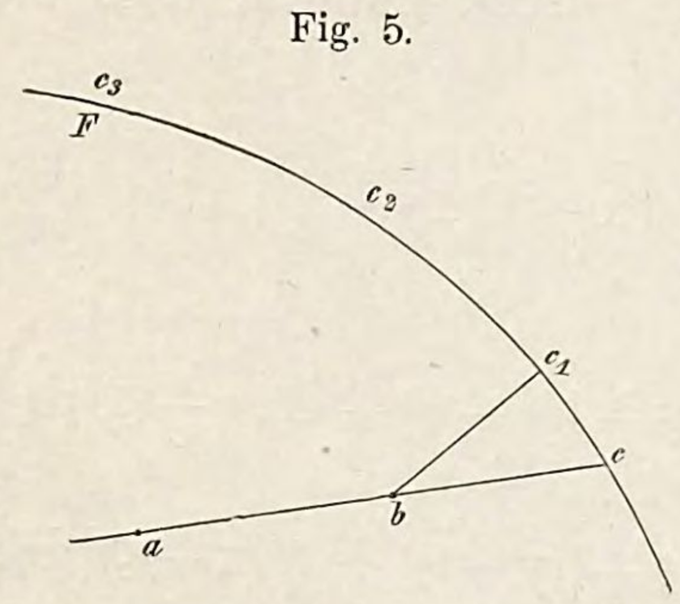
Hieraus folgt unmittelbar, dass, sobald man die Indices der verschiedenen Medien mit n_1 n_2 u. s. w. bezeichnet, die Weglängen des Strahles in denselben mit l_1 l_2 u. s. w., auch folgende Relation Geltung haben wird: $\frac{l}{n}+\frac{l_1}{n_1}+\frac{l_2}{n_2}+\frac{l_3}{n_3}$ u. s. w. $=C$, welchen Strahl man auch ins Auge fassen mag.

Diese Sätze lassen sich also auch aus dem Princip des kleinsten Zeitaufwandes ableiten, wie dies zuerst **Hamilton** gethan hat und besonders anschaulich **Neumann** in folgender Weise.

Beweis des Malus'schen Satzes nach Neumann.

Die von einem leuchtenden Punkte O ausgehenden Strahlen mögen beliebig viele Reflexionen und Brechungen erleiden, jedoch unter der Voraussetzung, dass jedes der von ihnen durchlaufenen Medien homogen und unkrystallinisch sei. Wir wollen uns diejenigen Punkte c, c′, c″ . . . aufgesucht denken, bis zu denen all diese Strahlen von O aus in einer gegebenen Zeit vordringen, und die von diesen Punkten c, c′, c″ gebildete Fläche mit F bezeichnen. Benennen wir also die von den Strahlen eingeschlagenen Wege mit Oabc, Oa′b′c′, Oa″b″c″, indem wir unter a, a′, a″ Punkte verstehen, die sehr nahe an O gelegen sind, andererseits aber unter b, b′, b″ . . . Punkte verstehen, die äusserst nahe gelegen sind, resp. an c, c′, c″ . . ., so wird die von den Strahlen zur Durchlaufung dieser Wege aufgewandte Zeit durchweg ein und dieselbe sein, was angedeutet sein mag durch die Formel:

Fig. 5.



$$Z(Oabc) = Z(Oa'b'c') = \ldots \qquad \text{I.}$$

Wir wollen nun die Hypothese machen, der Strahl Oabc fiele auf die Fläche F unter einem schiefen Winkel, und die Consequenzen aufsuchen, zu denen eine solche Hypothese hinleitet.

Zu diesem Zwecke fällen wir von b ein Perpendikel auf die Fläche F. Der Fusspunkt dieses Perpendikels liegt auf der Fläche F, gehört also zur Kategorie der Punkte c′, c″ . . ., und es kann somit z. B. der Punkt c′ auf der Fläche F in solcher Weise gewählt werden, dass er mit jenem Fusspunkt identisch ist. Alsdann ist bcc′ ein bei c′ rechtwinkliges Dreieck, also die Hypothenuse bc grösser als die Kathete bc′. Hieraus folgt, dass das Licht zur Durchlaufung des Weges Oabc mehr Zeit braucht, als es brauchen würde zur Durchlaufung des Weges Oabc′; (es soll hier unter Oabc′ ein Weg verstanden werden, welcher von O bis b mit dem Wege Oabc zusammenfällt, vom Punkte b aus aber nicht mehr durch die Hypothenuse bc, sondern durch die Kathete bc′ dargestellt ist.) — was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$Z\,(Oabc) > Z\,(Oabc') \qquad II.$$

Aus I. und II. folgt nunmehr sofort:

$$Z\,(Oa'b'c') > Z\,(Oabc') \qquad III.$$

Somit würde also für den Lichtstrahl Oa′b′c′ ein anderer Weg Oabc′ angebbar sein, auf welchem er in kürzerer Zeit von O nach c′ hätte gelangen können. Dies aber widerspricht einem bekannten allgemeinen Theorem. Folglich ist die von uns gemachte Hypothese, dass der Strahl Oabc auf die Fläche F unter schiefem Winkel falle, unrichtig, u. s. w.

Man bemerkt sofort, dass in Folge dieses Beweises der Malus'sche Satz auch noch gültig ist für nichthomogene Medien. Nur muss vorausgesetzt werden, dass erstens jedes der durchlaufenen Medien unkrystallinisch ist und dass zweitens jedes dieser Medien hinsichtlich seiner Beschaffenheit von einer Stelle zur anderen in stetiger Weise variirt.

Es hat keine besondere Schwierigkeit, die orthogonalen Flächen (A_1) zu berechnen. Wir haben die Gleichungen der drei Flächen:

$$(S)\ \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad 1. \qquad (A)\ F(u, t, v) = 0 \quad 2. \qquad (A_1)\ f(x, y, z) = 0 \quad 3.$$

Die Gleichungen des zu A normalen Strahles sind:

$$(u - \xi) + \frac{dv}{du}(v - \zeta) = 0 \qquad (t - \eta) + \frac{dv}{dt}(v - \zeta) = 0 \qquad 4.$$

Da $1 : l_1 = m : n$, erhalten wir:

$$(u - \xi)^2 + (t - \eta)^2 + (v - \zeta)^2 = \frac{m^2}{n^2}\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\right] \qquad 5.$$

Die Grössen rechts und links sind die Quadrate der Radien derjenigen Kugeln, welche die orthogonalen Flächen A und A_1 tangiren. Jetzt ist noch der Punkt der Oberfläche A_1 zu suchen, durch welchen der gebrochene Strahl geht. Wir denken uns die beiden beweglichen Kugelcentren auf der Fläche S in zwei unendlich nahe Positionen verschoben, dergestalt, dass das eine Mal die x-Coordinate, das andere Mal y constant bleibt. Differenziren wir also die Gleichung 5 ein Mal nach ξ, das zweite Mal nach η, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}(u - \xi) + (v - \zeta)\frac{d\zeta}{d\xi} &= \frac{m^2}{n^2}\left[(x - \xi) + (z - \zeta)\frac{d\zeta}{d\xi}\right]\\ (t - \eta) + (v - \zeta)\frac{d\zeta}{d\eta} &= \frac{m^2}{n^2}\left[(\eta - y) + (z - \zeta)\frac{d\zeta}{d\eta}\right]\end{aligned}\right\} \qquad 6.$$

Der Punkt u.t.v ist der allen drei Kugeln gemeinschaftliche Punkt der Einwickelnden A, so wie x.y.z. der gemeinschaftliche Schnittpunkt der drei unendlich benachbarten Kugeln auf der Fläche A_1 ist.

Aus diesen acht Gleichungen können wir $\xi.\eta.\zeta.$ und u.t.v eliminiren und erhalten dann die Gleichung der Oberfläche A_1.

Hat man an Statt von Flächen nur in einer Ebene gelegene Flächen zu berücksichtigen, so vereinfachen sich die Formeln:

$$(S)\ \varphi(\xi.\zeta) = 0 \qquad (A)\ F(u.v) = 0 \qquad (A_1)\ f(x.z) = 0$$

$$(\xi - u) + (\zeta - v)\frac{dv}{du} = 0 \qquad (\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 = \frac{n^2}{m^2}\left[(\xi - u)^2 + (\zeta - v)^2\right]$$

$$(\xi - x) + (\zeta - z)\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{n^2}{m^2}\left[(\xi - u) + (\zeta - v)\frac{d\zeta}{d\xi}\right].$$

Diese so ermittelten Curven A_1 sind als Caustica secundaria bezeichnet und als solche in den Tafeln angedeutet.

Die Causticae externae sind die Evoluten dieser Curven. Eine Berechnung der Causticae secundariae ist ebenso wenig wie die der orthogonalen Flächen von praktischer Wichtigkeit; zum Verständniss der Form des Brenngebildes genügt die Kenntniss des Umstandes, dass alle Strahlen stets zu einer Fläche senkrecht stehen, beziehendlich, wenn es sich nur um eine Ebene handelt, zu einer Curve. Hieraus lässt sich die allgemeine Form des Brenngebildes ableiten.

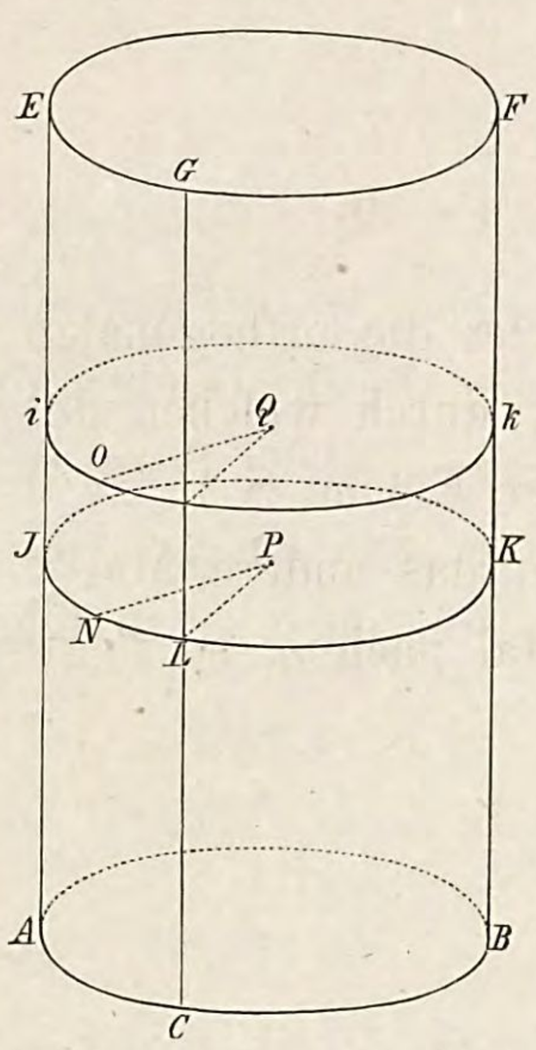
11. Die Krümmung der Flächen. Krümmungsradien.

Die Sätze über die Krümmungs-Curven und -Radien der Flächen haben ein doppeltes Interesse. Erstens bedürfen wir der Kenntniss der Krümmungsradien der brechenden Flächen an den verschiedenen Einfallspunkten von Strahlen. Zweitens haben wir im Vorausgehenden gezeigt, dass alle Strahlen, welche vor der Brechung senkrecht zu irgend einer Fläche waren, auch nach derselben wieder die Normalen irgend einer Fläche sind. Die Schnittpunkte je zweier unmittelbar benachbarter Normalen sind aber die Krümmungsmittelpunkte der dazwischen liegenden Flächenstücke in Bezug auf die betreffende Richtung.

Wir leiten die allgemeinen Sätze über die Krümmungscurven und Krümmungsmittelpunkte der Flächen ab.

Man nimmt auf einer Cylinderfläche ABFE (Fig. 6) einen Punkt L beliebig an und zieht die Seite GC durch denselben, legt darauf einen Querschnitt LJK senkrecht zur Cylinderwand und errichtet in L auf der Cylinderwand die Senkrechte LP, welche somit auch zu GC senkrecht ist und in der Ebene LJK liegt. Ausserdem ist sie die Normale zu der in L an dem Querschnitt LJK gezogenen Tangente und zu der durch die Tangente und die Seite GC gelegten Tangentialebene. Wir nehmen nun noch zwei unendlich wenig von L entfernte Punkte an, M auf der Linie GC und N auf dem Querschnitt, und errichten zur Cylinderfläche die Normalen MQ und NP. MQ und LP sind augenscheinlich parallel, liegen in der Ebene GCPQ und treffen sich im Unendlichen. NP und LP liegen ebenfalls in einer Ebene JLK und schneiden sich in einem Punkte P.

Fig. 6.



Mag man einen anderen Punkt O irgendwo beliebig annehmen, die in demselben auf der Cylinderfläche errichtete Normale wird niemals die erste Normale LP schneiden. Die Senkrechte OQ liegt in einer Parallelebene von LP und die letztere, LP, ist parallel MQ, nicht parallel OQ. Daher können OQ und LP sich niemals schneiden. Wenn man daher von einem Punkte L einer Cylinderfläche zu einem unendlich nahen Punkt fortschreiten will, für welchen die in ihm zur Oberfläche errichtete Normale mit der in L errichteten Normale in einer Ebene liegt, so dass die Senkrechten sich, wenn auch erst im Unendlichen, schneiden können, so kann man dies nur in zwei Weisen thun; I°, indem man der Cylinderseite folgt, die beiden Normalen treffen sich dann im Unendlichen. II°, indem man dem senkrechten Querschnitt folgt. Die Normalen treffen sich in endlicher Entfernung, deren Grösse abhängig ist von der Krümmung des Basalkreises. Beide Richtungen stehen senkrecht zu einander und zur Oberfläche.

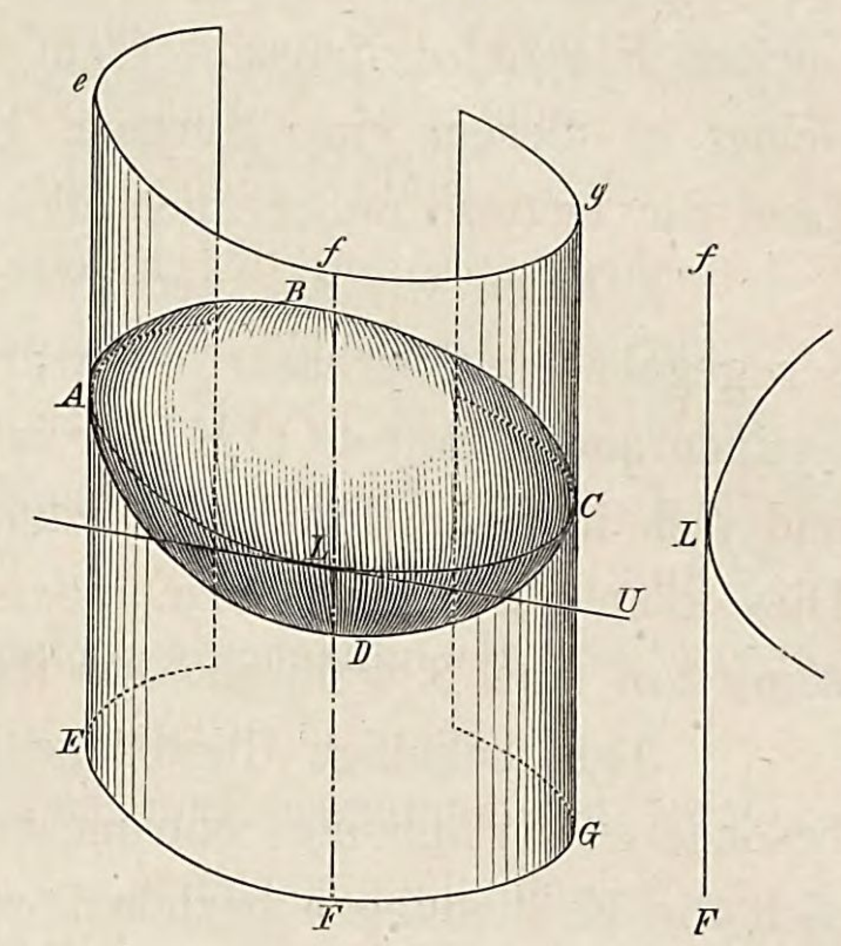
Es giebt somit nur zwei Krümmungscentren, von denen das eine bei der Cylinderfläche in unendlicher Entfernung liegt.

Das Gesagte lässt sich leicht auf alle abwickelbaren Flächen anwenden, bei welchen zwei auf einander folgende Elemente immer als zu einer Cylinderfläche gehörig betrachtet werden können.

Wir kommen zu dem Falle beliebig gekrümmter Oberflächen. Auf einer solchen (Fig. 7) sei ein beliebiger Punkt L und durch denselben die Tangente an der Oberfläche Flf angenommen. Die Lage derselben ist nicht bestimmt, sie kann nach allen beliebigen Richtungen geführt werden. Lassen wir die Tangente stets

parallel zu sich selbst um die gegebene Fläche sich so herumbewegen, dass sie immer Tangente an der letzteren bleibt, dann wird sie eine cylindrische Oberfläche E e g G beschreiben, deren Basis von der Form der gegebenen gekrümmten Fläche abhängt, und welche diese Fläche in einer Curve von, im allgemeinen Falle, doppelter Krümmung berührt, dieselbe sei A L C. Ziehen wir nun im Punkte L an die Curve A L C die Tangente L U, so wird dieselbe mit der ersten f L F einen Winkel F L U bilden, dessen Grösse von der Natur der gekrümmten Oberfläche und von der willkürlichen Richtung, welche der Tangente f L F gegeben wurde, abhängt. Denken wir uns, was immer möglich ist, die Tangente f L F ändere ihre Richtung, ohne aufzuhören, in L die Oberfläche zu tangiren, der Art, dass, wenn sie nun eine neue Cylinderfläche beschreibt, die in L an der neuen Berührungscurve gezogene Tangente senkrecht zu f L F stehe.

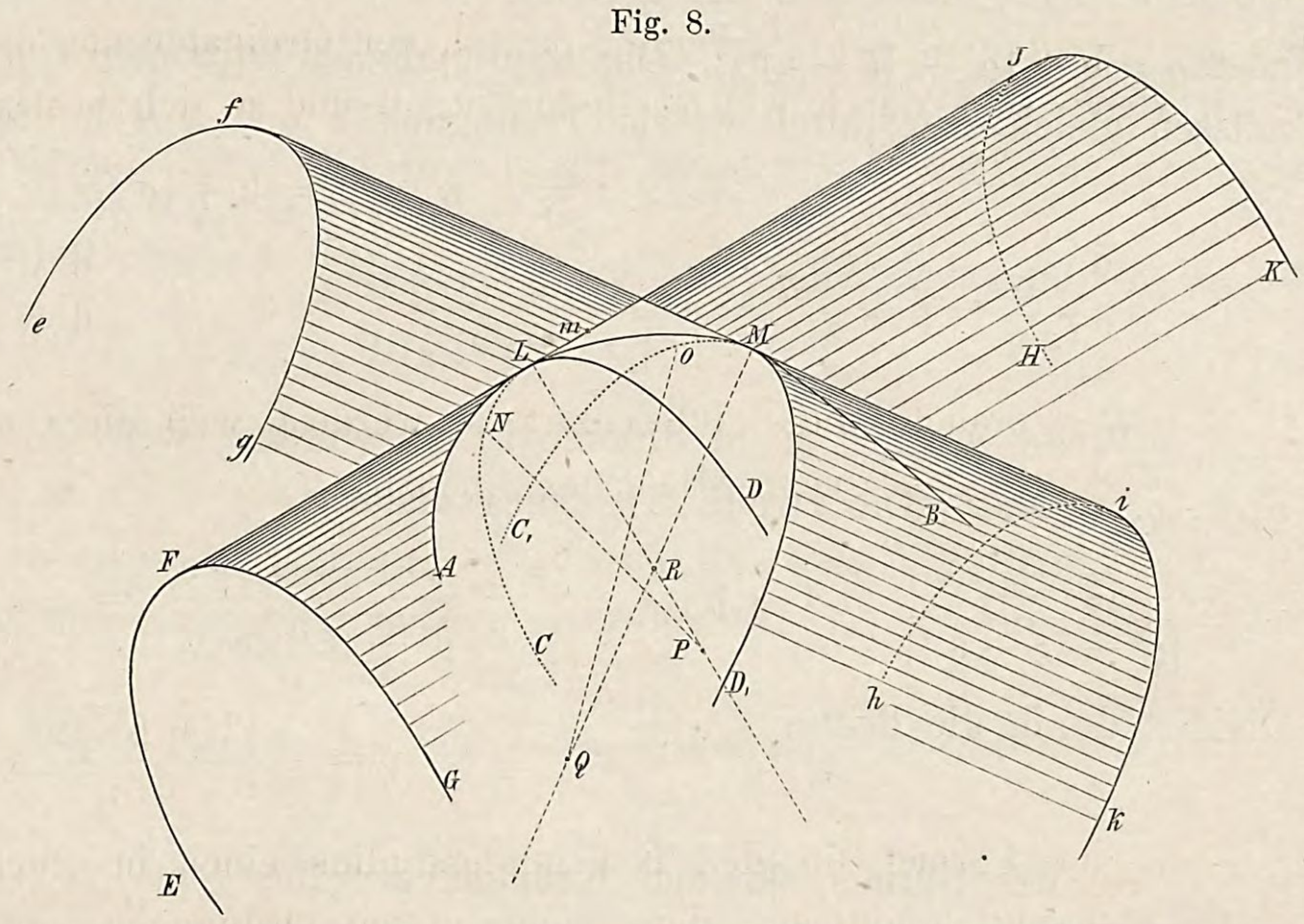
Fig. 7.



Nachdem wir diese Möglichkeit erkannt haben, nehmen wir auf einer beliebigen Oberfläche (Fig. 8) einen Punkt L an, die Tangente F L J sei so gezogen, dass sie, sobald man sie sich parallel sich selbst und immer die Oberfläche tangirend bewegen lässt, eine cylindrische Oberfläche E F G H J K erzeugt, die die gegebene gekrümmte Fläche in einer Curve berührt, deren Tangente in L senkrecht zu F L J steht. Die Berührungslinie wird eine Curve doppelter Krümmung sein, im Punkte L aber ein Theil derselben mit dem Querschnitt C N L D zusammenfallen, welcher auf der Cylinderfläche durch eine Ebene senkrecht zu F L J gemacht ist. Sind L und N zwei unendlich nahe gelegene Punkte des zusammenfallenden Stückes beider Curven und errichtet man auf der Cylinderfläche die beiden Normalen L P und N P, so sind diese auch senkrecht zu der Curve. Da sie ausserdem in demselben Querschnitt liegen, so müssen sie sich irgendwo in einem Punkte P schneiden, welcher das eine Krümmungscentrum ist.

Nimmt man auf der Geraden F L J einen unendlich nahen Punkt m an und errichtet in demselben eine Senkrechte zu der Cylinderfläche, so wird die letztere mit L P in einer Ebene liegen, aber nicht senkrecht zu der gekrümmten Oberfläche stehen. Stellt man sich dagegen vor, dass in der Ebene, welche durch die Linien F L J und L P bestimmt ist, und welche die gekrümmte Oberfläche in der Curve A L M B schneidet, die Linie F L J sich, ohne aufzuhören, Tangente an A L M B zu sein, von L nach einem unendlich nahen Punkte M bewege, hier die Lage f M i einnehme und nun parallel sich selbst und die gekrümmte Oberfläche stets tangirend die neue Cylinderfläche e f g h i k erzeuge, welche unendlich wenig verschieden von der ersten ist, dann wird die Normale M Q zu dieser Cylinderfläche, auch senkrecht zu der gekrümmten Oberfläche sein und mit L P in einer Ebene liegen, welche senkrecht zu der Ebene steht, in der sich L P und N P befinden. Die beiden Normalen L P und M Q werden sich in einem Punkte R treffen, welcher das zweite Krümmungscentrum ist.

Fig. 8.



Man sieht also, dass, wenn man auf einer beliebigen Oberfläche einen beliebigen Punkt L und in

diesem eine Normale zu der Oberfläche annimmt, man immer zwei verschiedenen Richtungen folgend, zu zwei anderen unendlich nahen Punkten übergehen kann, für welche die Normale jedesmal mit der ersten in je einer und derselben Ebene liegt, und dass die beiden Ebenen der Normalen zu einander, sowie zu der gekrümmten Oberfläche senkrecht stehen. Diese beiden Richtungen sind die einzigen, welche ein solches Ergebniss liefern. Geht man z. B. von L zu einem unendlich benachbarten Punkte O und errichtet in diesem eine Normale O Q, so kann diese nicht mit der Normale L P in einer Ebene liegen, kann die letztere daher auch nicht schneiden.

Nehmen wir an, der Punkt O sei ein Punkt der Berührungscurve der Cylinderfläche e f g h i k mit der gegebenen Oberfläche, so würde auf der unendlich kurzen Strecke O M die Berührungscurve mit dem Cylinderquerschnitt $C_1 O M D_1$ zusammenfallen, die beiden Normalen O Q und M Q in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte Q schneiden. Aber die Normale O Q trifft für gewöhnlich nicht die Normale L P. Dies könnte nur geschehen, wenn Q auf R fiele, die Krümmung von L M = der von O M wäre, es sich somit um eine Kugelfläche handelte.

Jede beliebige Oberfläche hat daher in jedem ihrer Punkte nur zwei Krümmungen, jede davon ein besonderes Krümmungscentrum und einen besonderen Krümmungsradius. Die beiden Bogen, auf welche sich die Krümmungen beziehen, stehen senkrecht zu einander. Die beiden Krümmungsradien werden gleich bei der Kugel und für den Scheitel der Rotationsflächen, welcher der Drehungsaxe entspricht.

Behufs analytischer Behandlung denken wir uns an die beliebige Oberfläche in einem beliebigen Punkte eine Tangentialebene gelegt und auf dieser eine Normale errichtet. Legen wir durch die Normale Ebenen, welche senkrecht zur Tangentialebene und daher auch zu der gegebenen Oberfläche stehen, so schneiden diese Normalebenen die gegebene Oberfläche in Curven. Es handelt sich darum, für jede dieser Schnittcurven denjenigen Kreis zu bestimmen, welcher mit der Curve in dem Fusspunkte der Normalen die möglichst innige Berührung eingeht.

Dies ist bekanntlich der Fall, wenn nicht nur die Ordinaten des Berührungspunktes für Curve und Kreis einander gleich sind, sondern auch die Zuwüchse, welche die Ordinaten erhalten, wenn man zu unmittelbar benachbarten Punkten der Curve und des Kreises übergeht. Es sei $y = F(x)$ die Gleichung einer der Curven, a und b die bestimmten, aber unbekannten Mittelpunktscoordinaten, ϱ der Radius, ξ und η die laufenden Coordinaten des gesuchten Kreises. Dann ist die Gleichung desselben $(\eta - b)^2 + (\xi - a)^2 = \varrho^2$ oder $\eta = b + [\varrho^2 - (\xi - a)^2]^{\frac{1}{2}}$. Die ursprünglichen Ordinaten und die Differentialquotienten beider Gleichungen müssen gleich sein, durch welche Bedingung b und a sich bestimmen.

$$y = F(x) = \eta = b + [\varrho^2 - (\xi - a)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi - a}{[\varrho^2 - (\xi - a)^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad 2. \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{d^2\eta}{d\xi} = -\frac{\varrho^2}{[\varrho^2 - (\xi - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad 3.$$

Weiter braucht nicht differenzirt zu werden, weil die Gleichung des Kreises nur drei Constanten, a, b, ϱ, enthält. Die zweite Gleichung quadrirt:

$$p^2 = \frac{(\xi - a)^2}{[\varrho^2 - (\xi - a)^2]} \qquad 1 + p^2 = \frac{\varrho^2 - (\xi - a)^2 + (\xi - a)^2}{\varrho^2 - (\xi - a)^2} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - (\xi - a)^2} \qquad (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\varrho^3}{[\varrho^2 - (\xi - a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

dividirt durch die dritte:

$$\varrho = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \qquad 4.$$

In der Formel für den Krümmungsradius einer in einer Ebene gelegenen Curve kommen somit nur die Differentialquotienten der beiden ersten Ordnungen vor. Es sei eine beliebige Fläche gegeben, $z = F(x, y)$. Im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, d. h. im Anfange des Coordinatensystems, sei eine Normale errichtet und durch dieselbe Ebenen gelegt; die Krümmungsradien der Schnittcurven dieser Ebenen mit der gegebenen Fläche sollen bestimmt werden. An die Stelle der gegebenen Fläche können wir eine andere setzen, welche mit der gegebenen gleiche Differentialquotienten hat, soweit dieselben gebraucht werden.

Nach obigen Annahmen ist die Normale der gegebenen Fläche zugleich die z-Axe, die Tangentialebene die Ebene der xy. Durch diese Wahl der Coordinaten geht die Gleichung der Tangentialebene $(\zeta - z) = p(\xi - x) + q(y - \eta)$ über in die Gleichung $\zeta = 0$, was nur möglich ist, da für den Anfangspunkt der Coordinaten $x = 0$ und $y = 0$ sind, wenn auch $p = 0$ und $q = 0$ werden. Die zweiten Differentialquotienten r, s, t lassen sich so nicht bestimmen, doch sind sie constant und wir wollen sie mit α, β, γ bezeichnen. Setzen wir nun, statt der gegebenen Fläche, diejenige eines Paraboloids:

$$z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta x y + \gamma y^2)$$

so werden die ersten Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = \alpha x + \beta y \qquad \frac{dz}{dy} = \beta x + \gamma y,$$

also für den Punkt $x = 0$, $y = 0$ ebenfalls $= 0$, wie die entsprechenden der gegebenen Fläche. Die zweiten sind:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \alpha = r, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = \beta = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \gamma = t.$$

Weil die Bezeichnungen $\alpha.\beta.\gamma.$ später anderweitig gebraucht werden, wollen wir von jetzt an die zweiten Derivirten mit r.s.t bezeichnen.

Lässt man den Normalschnitt mit der xz-Ebene zusammenfallen, so wird seine Gleichung $y = 0$. Die Gleichung der in dieser Ebene gelegenen Schnittcurve erhalten wir durch Einsetzung des Werthes $y = 0$ in die Gleichung $z = \frac{1}{2}(r x^2 + 2 s x y + t y^2)$, also $z = \frac{1}{2} r x^2$. Bilden wir davon die beiden ersten Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = r x$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = r$ und setzen dieselben in die Formel für den Krümmungsradius

$$\varrho = -\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{r} = -\frac{(1 + r^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{r}.$$

Für den Anfangspunkt des Coordinatensystems $x = 0$ wird $\varrho_1 = \frac{1}{r} = \frac{d^2 z}{dx^2}$. Ebenso ergiebt sich für den yz-Schnitt $\varrho_2 = \frac{1}{t} = \frac{d^2 z}{dy^2}$.

Nehmen wir eine Transformation des Coordinatensystems vor durch Drehung um die z-Axe. Die Grösse des Drehungswinkels ϑ werde bestimmt durch die Gleichung: $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2s}{r - t}$. Auf die neuen Coordinaten bezogen, fällt dann aus der Gleichung $z = \frac{1}{2}(r x^2 + 2 s x y + t y^2)$ die zweite Grösse aus, da $s = 0$ wird.

$$2z = r x^2 + 2 s x y + t y^2.$$

Drehen wir das Coordinatensystem um die z-Axe um einen Winkel ϑ, so wird

$$x = x_1 \cos\vartheta - y_1 \sin\vartheta \qquad y = x_1 \sin\vartheta + y_1 \cos\vartheta.$$

Also

$$2z = r(x_1^2 \cos^2\vartheta - 2 x_1 y_1 \sin\vartheta\cos\vartheta + y_1^2 \sin^2\vartheta) + t(x_1^2 \sin^2\vartheta + 2 x_1 y_1 \sin\vartheta\cos\vartheta + y_1^2 \cos^2\vartheta)$$
$$+ 2s[x_1^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + x_1 y_1 (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - y_1^2 \sin\vartheta\cos\vartheta].$$

Soll $x_1 y_1$ ausfallen, so muss sein

$$-2r\sin\vartheta\cos\vartheta + 2t\sin\vartheta\cos\vartheta + 2s(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0 \quad \text{oder} \quad -(r - s)\sin 2\vartheta + 2s\cos 2\vartheta = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2s}{r - t}.$$

Es ergiebt sich $z = \frac{1}{2}(r x^2 + t y^2)$. Den Radius für den xz-Schnitt haben wir oben schon erhalten $\varrho_1 = \frac{1}{r}$. Ebenso den Radius für den yz-Schnitt $\varrho_2 = \frac{1}{t}$.

Machen wir jetzt eine Coordinatentransformation:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \qquad y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Die x_1-Axe weicht von der x-Axe um einen Winkel φ ab, die z-Axe behält ihre Lage. Setzt man die Werthe für x und y in die Gleichung $z = \frac{1}{2}(r x^2 + t y^2)$, und dann $y_1 = 0$, so erhält man die Gleichung für die Schnittcurve des $z x_1$-Schnittes, welcher mit dem $z x$-Schnitt einen Winkel $= \varphi$ macht:

$$z = \frac{1}{2} x_1^2 (r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi).$$

Setzt man die Grösse in der Klammer $= \varepsilon$, so wird $z = \frac{1}{2} \varepsilon x_1^2$.

Man leitet hieraus in analoger Weise den Krümmungsradius der Schnittcurve dieses Schnittes ab, nämlich:

$$\varrho_0 = \frac{1}{r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi$$

und da $r = \frac{1}{\varrho_1}$ $t = \frac{1}{\varrho_2}$ $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_2}$ (Der Euler'sche Satz.)

Da die Krümmung einer Kreislinie umgekehrt proportional dem Radius ist, so können wir auch schreiben: $k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$. Es sei $k_1 > k_2$. Diese Gleichung zeigt in folgender Form $k = k_1 - (k_1 - k_2) \sin^2 \varphi$, dass k den grössten Werth erhält, wenn $\varphi = 0$ ist, d. h. wenn die $z x$-Ebene die Schnittebene ist. Es ist $k = k_1$. Folglich ist k_1 die grösste Krümmung und ϱ_1 der kleinste Radius. Schreibt man die Gleichung $k = k_2 + (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi$, so erhält k den kleinsten Werth für $\varphi = 90^0$, d. h. für die $y z$-Ebene. Es wird $k = k_2$, k_2 ist die kleinste Krümmung, ϱ_1 der grösste Radius. Die Ebenen der grössten und kleinsten Krümmung stehen senkrecht zu einander, da es die $x z$- und $y z$-Ebenen sind.

Zieht man in den verschiedenen Schnittebenen Radien, so stehen zwar alle diese Radien auf der jedesmaligen Schnittcurve senkrecht, jedoch nicht zu der gegebenen Fläche. Zu dieser sind normal alle Radien der Hauptschnitte, von den übrigen Schnitten nur diejenigen Radien, die mit der Normale, durch welche die Schnitte gelegt sind, zusammenfallen. Es geht dies aus der oben vermittelst der descriptiven Geometrie geführten Demonstration hervor. Analytisch lässt sich dieser Punkt folgendermassen begründen: Wir gehen wieder von der allgemeinen Gleichung des Osculations-Paraboloids aus $z = \frac{1}{2}(r x^2 + 2 s x y + t y^2)$. Die x-Axe hat eine beliebige Richtung innerhalb der Tangentialebene. Nehmen wir in dieser Axe ein unendlich kleines Stück $O M = \delta$ vom Berührungspunkte O aus und errichten in M eine zweite Normale M m, schneiden auch von der y-Axe ein Stück $O N = \delta$ ab und errichten eine dritte Normale N n, die Richtungscosinusse dieser Normalen seien $\lambda . \mu . \nu$ und $\lambda_1 . \mu_1 . \nu_1 .$, so erhalten wir, da bekanntlich die allgemeinen Ausdrücke für die Richtungscosinusse der Normalen einer Fläche sind:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},\ \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},\ \frac{-1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};\ \cos \lambda = \frac{d z}{d x} \times \frac{1}{w},\ \cos \mu = \frac{d z}{d y} \times \frac{1}{w},\ \cos \nu = \frac{d z}{d z} \times \frac{1}{w},$$

wenn wir $\sqrt{\frac{d^2 z}{d x^2} + \frac{d^2 z}{d y^2} + 1} = w$ setzen. Führen wir die Differentiation aus:

$$\cos \lambda = \frac{1}{w}(r x + s y),\ \cos \mu = \frac{1}{w}(s x + t y),\ \cos \nu = \frac{1}{w} = \frac{1}{\sqrt{1 + (r x + s y)^2 + (s x + t y)^2}}.$$

Da für die Normale M $x = \delta$, $y = 0$ sind, so folgt:

$$\cos \lambda = \frac{r \delta}{\sqrt{1 + (r^2 + s^2) \delta^2}},\ \cos \mu = \frac{s \delta}{\sqrt{1 + (r^2 + s^2) \delta^2}},\ \cos \nu = -\frac{1}{\sqrt{1 + (r^2 + s^2) \delta^2}}.$$

Wegen des unendlich kleinen δ kann δ^2 gegen 1 im Nenner vernachlässigt werden, und wir erhalten $\cos \lambda = r \delta$, $\cos \mu = s \delta$. In gleicher Weise erhält man für die Normale in N, indem man $x = 0$ und $y = \delta$ setzt: $\cos \lambda_1 = s \delta$; $\cos \mu_1 = t \delta$ und $\cos \lambda_1 = \cos \mu$.

Nun ist λ_1 das Complement des Winkels, welchen die Normale in N mit der $y z$-Ebene, μ das Complement desjenigen, welchen die durch M gehende Normale mit der $x z$-Ebene macht. Von diesen

Winkeln sind also die Sinusse $= s\delta$. Weil die Sinusse gleiche Vorzeichen haben, so müssen die Winkel beide entweder innerhalb oder ausserhalb der durch die xz- und yz-Ebenen gebildeten Ecke liegen. Die Normalen N und M schneiden also im Allgemeinen die in O errichtete Senkrechte OZ nicht. Dies kann nur geschehen, wenn $\cos\lambda_1 = \cos\mu = s = 0$ ist, was, wie wir oben gesehen haben, eintritt, sobald die x- und y-Axe in Hauptschnitten liegen. Es giebt also für jeden Punkt O zwei auf einander senkrechte Richtungen (Hauptschnitte), welche die Eigenschaft haben, dass die in ihnen liegenden nächsten Normalen die durch O gehende schneiden.

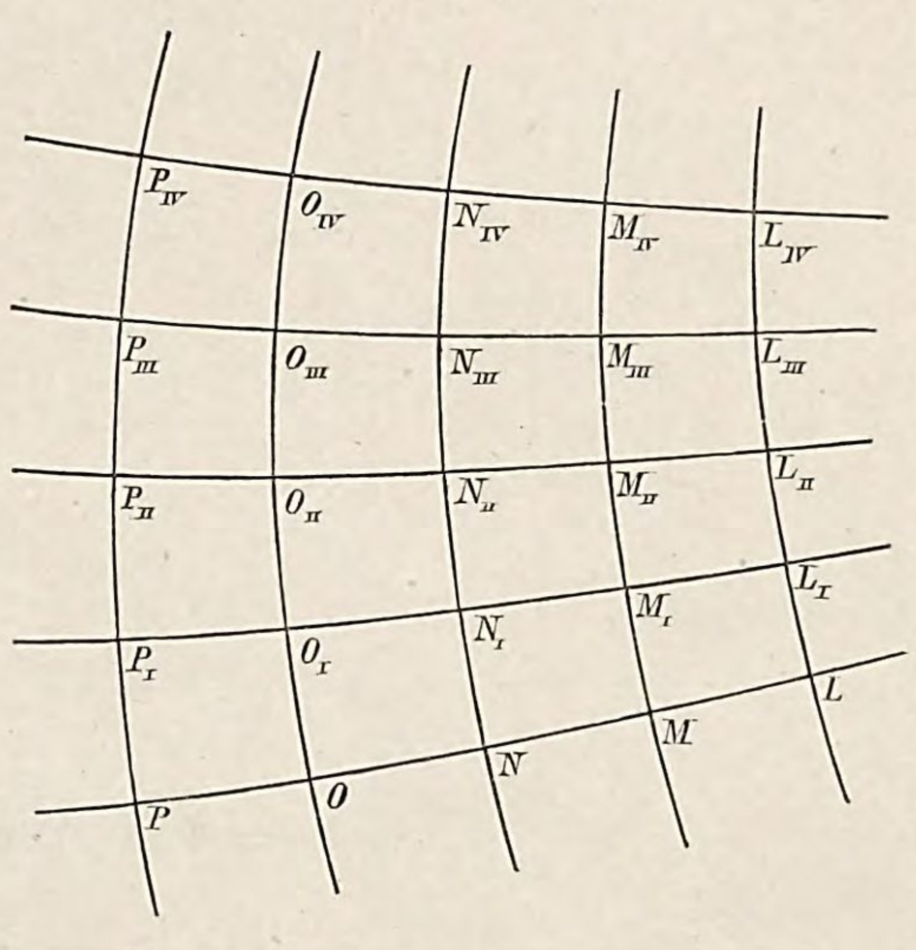
Bei der Anwendung dieser Sätze auf die brechenden Flächen findet eine wesentliche Vereinfachung statt, da es sich in der Regel um kugelige oder Rotationsflächen handelt. Erstere weisen für jeden Einfallspunkt denselben Krümmungsradius auf, und die letzteren ermöglichen eine verhältnissmässig leichte Bestimmung der Hauptschnitte, da der eine stets derjenige der erzeugenden Curve ist und der andere durch die Tangente an den Rotationskreis gegeben wird. Ist die Einfallsebene des Strahlenbündels nicht zugleich diejenige eines dieser Hauptschnitte, so erhält man vermittelst der Euler'schen Formel leicht den Krümmungsradius der fraglichen Schnittcurve, indem man φ gleich dem Winkel zwischen Einfallsebene und einem Hauptschnitt setzt.

Das Bedürfniss, die Krümmungsradien nicht mit den Hauptschnitten zusammenfallender Schnitte zu kennen, würde sich nur bei der Hornhautfläche geltend machen können. Legt man indessen durch den Leuchtpunkt und die die Centren der brechenden Medien enthaltende Axe die Haupt-Einfallsebene, welche also mit einem Hauptschnitt der Hornhaut zusammenfällt, so werden bei der Kleinheit der Pupille die in dieser Ebene und die ihr unmittelbar benachbart verlaufenden Strahlen stets den Hauptbestandtheil des Retinabildes ausmachen. Es ist daher statthaft, die übrigen Einfallsebenen zu vernachlässigen und sich auf die Berechnung der in der Haupteinfallsebene verlaufenden dünnen Bündel zu beschränken.

12. Brenngebilde. II.

Wir verfolgen nun die Sätze über die Flächenkrümmung weiter, um daraus die Gestalt der Brenngebilde abzuleiten. Gegeben sei ein Stück einer beliebigen Oberfläche und auf demselben ein Punkt L. Geht man in der oben beschriebenen Weise von L nach zwei unendlich benachbarten Punkten M und L_I über, so dass die in L_I errichtete Normale mit der Normale in L in einer Ebene liegt und ebenso die beiden Normalen in M und L_I sich in einer zweiten Ebene befinden, dann stehen die beiden, die Normalen enthaltenden, Ebenen zu einander senkrecht. In gleicher Weise schreitet man von M nach N und M_I, von L_I nach M_I und L_{II} fort u. s. w. Denkt man sich die Normalen sämmtlich errichtet und durch die Buchstaben ihrer Fusspunkte bezeichnet, so wird L mit L_I, L_I mit L_{II}, L_{II} mit L_{III}, L_{III} mit L_{IV} in einer Ebene liegen, sämmtliche Normalen eine zur gegebenen Oberfläche senkrechte, gekrümmte, aber abwickelbare Fläche darstellen. Ebenso die Normalen in LMNOP diejenigen in $L_I M_I N_I O_I P_I$ u. s. w. die Linien LMNOP; $L_I M_I N_I O_I P_I$ u. s. w. sind die Krümmungscurven nach der einen Richtung, $L L_I L_{II} L_{III} L_I$ u. s. w. diejenigen nach der zweiten Richtung. Wir erhalten somit zwei senkrecht zu einander stehende Systeme von Flächen, welche alle wiederum senkrecht zu der gegebenen Oberfläche sind. In jeder einzelnen Normalfläche $L L_I L_{II} L_{III} L_{IV}$ oder LMNOP u. s. w. bilden die Schnittpunkte je zweier aufeinanderfolgender Normalen eine Linie, welche die Evolute der betreffenden Krümmungscurve $L L_I L_{II} L_{III} L_{IV}$ ist und zugleich die Wendungskante (arête de rebroussement) der Fläche darstellt. Die Wendungskanten

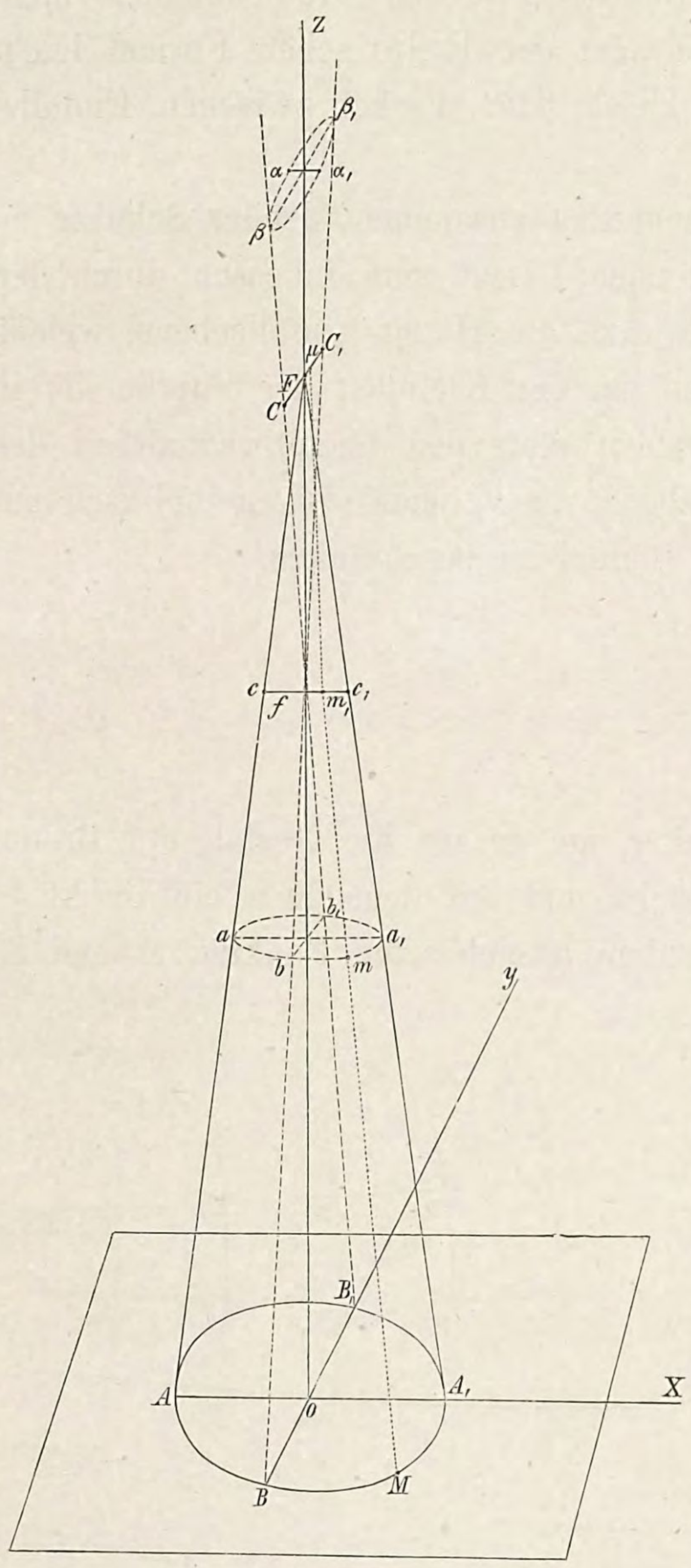
Fig. 9.



der Flächen $L L_I L_{II} L_{III} L_{IV}$, $M M_I M_{II} M_{III} M_{IV}$ u. s. w. bilden eine gebogene abwickelbare Fläche, welche zu einer anderen gebogenen abwickelbaren Fläche, die aus den Wendungskanten der Flächen L M N O P u. s. w. zusammengesetzt ist, senkrecht steht. Die durch die Normalen $L_I M_I N_I O_I P_I$ gebildete Fläche schneidet die Fläche, welche durch die Normalen L M N O P geht, in einer gekrümmten Linie; die Normalfläche $M M_I M_{II} M_{III} M_{IV}$ diejenige der $N N_I N_{II} N_{III} N_{IV}$ ebenfalls in einer gekrümmten Linie, u. s. w. Da die die Schnittlinien liefernden Flächen senkrecht zu einander stehen, so liegen auch die Schnittlinien in zwei zu einander senkrechten Flächen. Betrachten wir ein unendlich kleines Stück der gegebenen Oberfläche, so können die erwähnten Schnittlinien als Gerade angesehen werden.

Es sei $A A_1$ (Fig. 10) die Krümmungscurve einer Richtung, $B B_1$ diejenige der anderen auf einem unendlich kleinen Stück einer gekrümmten Fläche, dann werden die Schnittpunkte der Normalen der einen eine unendlich kurze Linie $C C_1$ bilden, die Schnittpunkte der anderen eine ebensolche Linie $c c_1$, welche in einer zu $C C_1$ senkrechten Ebene, je nachdem die Oberfläche nach der einen oder anderen Richtung stärker gekrümmt ist, näher oder ferner von der Oberfläche als $C C_1$ liegt. Da nun nach dem Malus-Dupin'schen Gesetz die Lichtstrahlen nach der Brechung zu irgend einer Fläche senkrecht stehen, wenn sie vor der Brechung zu irgend einer anderen normal waren, so sind die gebrochenen Strahlen die Normalen dieser Fläche, und das Brenngebilde muss stets die Form zeigen, welche wir jetzt kennen gelernt haben. Es gilt dies sowohl für das ausgedehnte Gesammtbündel wie für die unendlich dünnen Bündel, aus welchen jenes zusammengesetzt ist. Ein unendlich dünnes Strahlenbündel muss daher immer durch zwei in zu einander senkrechten Ebenen gelegene Brennlinien hindurchgehen.

Fig. 10.



Dieser wichtige Satz soll auch noch analytisch bewiesen werden. Es sei $A B A_1 B_1$ ein unendlich kleines, etwa kreisförmiges Stück einer beliebig gekrümmten Oberfläche, auf welcher die Strahlen eines Lichtbündels senkrecht stehen. Die Gleichung dieser Oberfläche, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten, sei $z = f(x, y)$. Setzen wir $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, so erhalten wir die allgemeinen Projektionsgleichungen für die Normale in einem beliebigen Punkte (x, y, z) der Fläche:

$$X - x + p(Z - z) = 0 \qquad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

wenn X und Y die laufenden Ordinaten sind. Für den Anfangspunkt des Ordinatensystems O $(x = y = 0)$ wird $X = Y = 0$, ebenso p und $q = 0$. Gehen wir zu einem unendlich nahen Punkte $(\xi, \eta, \zeta,)$ über, so erhalten wir

$$X - \xi + p_1(Z - \zeta) = 0 \qquad Y - \eta + q_1(Z - \zeta) = 0.$$

$$p = \Phi(x y) \cdot q = \Psi(x y)$$

$$p_1 = \varphi(x + \xi, y + \eta) = \varphi(x y) + \xi \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 p}{d x^2} \ldots$$

$$q_1 = \psi(x + \xi, y + \eta) = \psi(x y) + \xi \frac{\partial q}{d x} + \eta \frac{\partial q}{d y} + \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 q}{d x^2} \ldots$$

Nun werden $p = \varphi(x y)$ und $q = \psi(x y)$ gleich Null, wenn x, y, z, der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

Wir erhalten

$$p_1 = \xi \frac{\partial p}{d x} + \eta \frac{\partial p}{d y} + \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 p}{d x^2} + \cdots \qquad q_1 = \xi \frac{\partial q}{d x} + \eta \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.$$

Die Grössen zweiten Grades können wir vernachlässigen. Die Gleichungen der Normale werden

$$X - \xi + \left(\xi \frac{\partial p}{d x} + \eta \frac{\partial p}{\partial y}\right) Z = 0 \qquad Y - \eta + \left(\xi \frac{\partial q}{\partial x} + \eta \frac{\partial q}{\partial y}\right) Z = 0.$$

Ebenso kann ζ vernachlässigt werden, da $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} \xi^2 + 2 \frac{\partial p}{\partial y} \xi \eta + \frac{\partial q}{\partial y} \eta^2 + \cdots\right)$, also zweiter Ordnung ist.

Vorstehende Gleichung ist diejenige eines ellipsoidischen Paraboloids. Die zweite Grösse kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn wir die x-Axe des Coordinatensystems um einen Winkel ϑ drehen, so dass $\operatorname{tg}(2\vartheta) = \dfrac{2 \frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}}$ ist. Wir erhalten dann die auf die symmetrischen Axen bezogene Formel:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} \xi^2 + \frac{\partial q}{\partial y} \eta^2\right).$$

In allen Fällen, wo man voraussieht, dass von einer Fläche nur die Differentialquotienten bis zur nten Ordnung in Beziehung auf einen Punkt derselben gebraucht werden, kann man statt der gegebenen Fläche irgend eine beliebige andere setzen, vorausgesetzt, dass diese mit der ersteren eine Osculation nter Ordnung hat. Wir nehmen also hier ein Paraboloid von der Formel $\zeta = \frac{1}{2}(r \xi^2 + 2 s \xi \eta + t \eta^2)$.

Die ersten Differentialquotienten $\quad \frac{d \zeta}{d \xi} = r \xi + s \eta, \quad \frac{d \zeta}{d \eta} = s \xi + t \eta$

werden für den Punkt O gleich Null ($\xi = \eta = 0$), die zweiten müssen die beistehenden Werthe erhalten:

$$\frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} = r = \frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{d p}{d x} \text{ und } \frac{d^2 \zeta}{d \eta^2} = t = \frac{d^2 z}{d y^2} = \frac{d q}{d y} \text{ und } \frac{d^2 \zeta}{d \xi \cdot d \eta} = s = \frac{d^2 z}{d x \cdot d y} = \frac{d p}{d y} = \frac{d q}{d x}.$$

Lassen wir die x- und y-Axe des Coordinatensystems sich so drehen, dass sie in die Ebenen stärkster und schwächster Krümmung fallen, so verschwindet $2 s \xi \eta$ und die Formel wird:

$$\zeta = \frac{1}{2}(r \xi^2 + t \eta^2) \text{ oder } \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} \xi^2 + \frac{\partial q}{\partial y} \eta^2\right).$$

Die Normalengleichungen waren

$$X - \xi + \frac{\partial \zeta}{\partial x}(Z - \zeta) = 0 \qquad Y - \eta + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(Z - \zeta) = 0.$$

Führen wir die Differentiation von ζ aus und vernachlässigen ζ, so folgen

$$X - \xi + \frac{\partial p}{\partial x} \xi \times Z = 0 \qquad X - \xi + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \xi Z = 0$$

$$Y - \eta + \frac{\partial q}{\partial y} \eta \times Z = 0 \qquad Y - \eta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \eta Z = 0$$

$$X = \xi\left(1 - Z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \qquad Y = \eta\left(1 - Z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Nun sind die Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte des Paraboloids:

$$\varrho_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \qquad \varrho_2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$$

oder für den Punkt O: $(x = y = 0)$ $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Setzen wir ein, so folgt:

$$X = \xi\left(1 - \frac{Z}{\varrho_1}\right) = \xi \frac{(\varrho_1 - Z)}{\varrho_1} \qquad Y = \eta\left(1 - \frac{Z}{\varrho_2}\right) = \eta \frac{(\varrho_2 - Z)}{\varrho_2}.$$

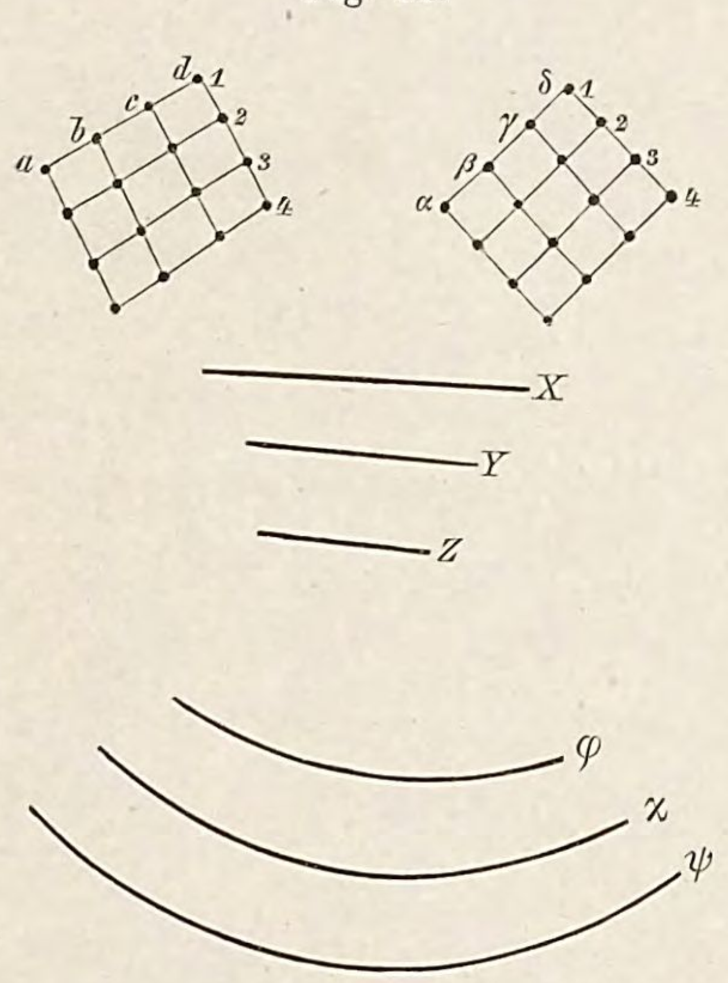
Für den Durchschnittspunkt mit der xz-Ebene ergiebt sich $Y = 0$; $Z = \varrho_2$; $X = \frac{\xi(\varrho_1 - \varrho_2)}{\varrho_1}$; mit der yz-Ebene $X = 0$; $Z = \varrho_1$; $Y = \frac{\eta(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_2}$. Die Normale ist somit die Schnittlinie zweier Ebenen, welche durch den Punkt M und je eine der beiden Brennlinien $c f c_1$ oder $C F C_1$ gelegt ist.

Die vorstehende Entwicklung führt auf zwei, nicht blos in zwei senkrecht zu einander stehenden Ebenen gelegene Focallinien, sondern zu zwei solchen Geraden, welche auch senkrecht zum Hauptstrahl des Bündels gerichtet sind.

In Wirklichkeit sind allgemein die Brennlinien doppelt gekrümmte Curven und können dieselben als senkrecht zum Hauptstrahl nur betrachtet werden, wenn die unendliche Kleinheit der Bündel nicht aus den Augen verloren wird. Man erhält aber vollständig genau die Punkte F und f und weiss, dass die Linien $c c_1$ und $C C_1$ in zu einander senkrechten Ebenen liegen.

Die Tafel XI enthält eine Reihe stereoskopischer Darstellungen zur Erläuterung hauptsächlich der Brenngebilde. Mathematisch betrachtet handelt es sich um die Gebilde, welche durch die Schnittpunkte der Normalen oder Krümmungshalbmesser einer beliebig gekrümmten Fläche erzeugt werden. Optisch können diese Figuren zwiefache Bedeutung haben. Einmal kann die Fläche, auf welcher die Linien senkrecht stehen, die brechende Fläche sein, die Normalen selbst sind dann die Krümmungshalbmesser; doch kommen hier ausser sphärischen Flächen, deren Normalen sich alle im jedesmaligen Centrum schneiden, nur noch Rotationsflächen in Frage. Solche würden bei den Figuren 4 und 5 unten zu denken sein. Die Krümmungsmittelpunkte der einen Richtung liegen alle in einer Geraden, der Rotationsaxe, die der anderen liegen in einer Evolute. Zweitens dienen die stereoskopischen Darstellungen dazu, und dies ist der eigentliche Zweck, uns die verschiedenen Formen der Brenngebilde vorzuführen, zu welchen sich die gebrochenen Strahlen vereinigen können. Nach dem Malus'schen Gesetz sind Strahlen, welche ursprünglich zu einer Fläche senkrecht waren, schliesslich, nachdem sie eine beliebige Anzahl von Brechungen durchgemacht haben, wieder die Normalen einer Fläche, welche Trajectorie, Normalfläche, orthogonale Fläche oder Caustica secundaria genannt wird. Die Brenngebilde sind die Gesammtheit der Schnittpunkte der Normalen dieser Flächen. In allgemeinen und in besonderen Fällen gestalten sich die Brenngebilde in verschiedener Weise. Alle möglichen Formen der Brenngebilde werden wir erhalten, wenn wir die Gebilde untersuchen, welche die Normalen einer Fläche, je nach der Beschaffenheit der letzteren, erzeugen. Wir wollen von der allgemeinsten Form ausgehen.

Fig. 11.



Die stereoskopische Figur 1 Taf. XI stellt die Gruppirung der Normallinien zu einer beliebigen Fläche, etwa zu der Fläche, welche in Figur 9 (Seite 35) abgebildet ist, dar. Die Fläche befindet sich oben. Wir denken uns die Strahlenreihen, links vorn beginnend, in der linken Ansicht mit a, b, c, d, in der rechten mit α, β, γ, δ, die Querreihen, links hinten beginnend, dagegen beiderseits mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Dann haben wir zwei Systeme von je vier Flächen, die sich einander unter rechten Winkeln schneiden. Die Flächen des ersten Systems sind dargestellt, die erste durch die Strahlen $a_1 a_2 a_3 a_4$, die zweite durch die Strahlen $b_1 b_2 b_3 b_4$ u. s. w., resp. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Im oberen Theile der Abbildung liegt die Fläche $d_1 d_2 d_3 d_4$, beziehendlich $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$, am weitesten rechts hinten. Ein zweites System, welches senkrecht zum ersten steht, geht durch die Strahlen $a_1 b_1 c_1 d_1$, beziehendlich $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$; $a_2 b_2 c_2 d_2$ u. s. w. Im unteren Theile der Figur liegt die Fläche $a_1 b_1 c_1 d_1 \times \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ dem Betrachter zunächst, die Fläche $a_4 b_4 c_4 d_4 \times \alpha_4 \beta_4 \gamma_4 \delta_4$ am weitesten hinten links.

Die Flächen sind im Allgemeinen nicht ebene, sondern gebogene, aber abwickelbare Flächen. Der Strahl a schneidet den Strahl b_1 in einem Punkte links oben, den Strahl a_2 in einem anderen rechts unten.

Diese beiden Punkte sind die Krümmungsmittelpunkte des Flächenstückes $a_1 b_1 b_2 a_2$, der erstere für die Richtung $a_1 b_1$, der zweite für die Richtung $a_1 a_2$. Der Strahl b_1 schneidet den Strahl c_1 ebenfalls in einem näher liegenden, den Strahl b_2 in einem ferneren Punkte. Wir bezeichnen die Schnittpunkte, indem wir zwischen die betreffenden Strahlen das Zeichen $\times$ setzen. Die Schnittpunkte $a_1 \times b_1$; $b_1 \times c_1$; $c_1 \times d_1$ bilden eine Wendungskante, eine evolutenähnliche Curve doppelter Krümmung, ebenso die derjenigen Strahlen, welche die übrigen Flächen zusammensetzen. Eine andere Wendungskante bilden die Schnittpunkte $a_1 \times a_2$; $a_2 \times a_3$; und $a_3 \times a_4$.

Die Strahlen $a_1 b_1 c_1 d_1$ bilden eine abwickelbare Fläche und sind Tangenten an der Wendungskante derselben. Die Wendungskante ist im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung und besteht aus den Punkten $a_1 \times b_1$ (in x); $b_1 \times c_1$ (in y); $c_1 \times d_1$ (in z). Denkt man sich die abwickelbare Fläche abgewickelt, d. h. den Theil, welcher zwischen je zwei Strahlen, den Erzeugungslinien, liegt, so um die eine von beiden gedreht, dass sie mit dem nächsten Theile in eine Ebene fällt, diese Ebene dann um den nächsten Strahl gedreht, bis sie in die Ebene des folgenden Theiles fällt, u. s. w., so wird aus der ganzen Fläche eine Ebene und aus der Wendungskante eine evolutenähnliche ebene Curve. Dies zeigen die Figuren 4 und 5, wo die Krümmungsmittelpunkte der einen Richtung je in einer Ebene in Form einer Evolute angeordnet sind.

Denken wir uns, die Strahlen $a_1 a_2$; $b_1 b_2$ stellten ein unendlich dünnes Bündel dar, so würde die Verbindungslinie der Schnittpunkte $a_1 \times a_2$ mit $b_1 \times b_2$ ein Querschnitt des Bündels an dieser Stelle sein; ein anderer senkrecht zum ersten gerichteter Querschnitt wäre die Verbindungslinie der Schnittpunkte $a_1 \times b_1$ mit $a_2 \times b_2$. Sämmtliche Verbindungslinien sind gezogen. Die Verbindungslinie $a_3 \times a_4$; $b_3 \times b_4$; $c_3 \times c_4$; $d_3 \times d_4$ werde mit φ bezeichnet. Die beiden anderen Schnittlinien sind χ und ψ. In gleicher Weise bezeichnen wir die Verbindungslinien der näheren Schnittpunkte mit x, y und z, so dass z. B. z die Linie $c_1 \times d_1$; $c_2 \times d_2$; $c_3 \times d_3$; $c_4 \times d_4$ ist. Die durch $a_1 - a_4$ und $b_1 - b_4$ gelegten Flächen schneiden sich in der Linie x, die durch $b_1 - b_4$ und $c_1 - c_4$ in y, die durch $c_1 - c_4$ und $d_1 - d_4$ gelegten in z. Die Fläche $a_1 - d_1$ schneidet die Fläche $a_2 - d_2$ in ψ, diese die Fläche $a_3 - d_3$ in χ und endlich die Fläche $a_3 - d_3$ die Fläche $a_4 - d_4$ in φ. Die Linien x, y, z und φ, χ, ψ sind im Allgemeinen Curven doppelter Krümmung.

Diese Form des Brenngebildes ist die allgemeine und liegt allen übrigen zu Grunde. Ueber die Krümmung der Trajectoriefläche ist keine Voraussetzung gemacht. Die Linien x, y, z sind die ersten, φ, χ, ψ die zweiten Brennlinien des Gesammtbündels. Greift man vier Nachbarstrahlen heraus, so repräsentiren dieselben ein unendlich dünnes Bündel, und die zwischen denselben liegenden Stücke je einer der Curven x, y, z und φ, χ, ψ sind die Brennlinien des unendlich dünnen Bündels.

Die Fig. 2 Taf. XI zeigt dasselbe, wie Fig. 1. Es sind vier Strahlen fortgelassen, so dass in der einen Richtung nur zwei Brennlinien, φ und χ, vorhanden sind. Dadurch wird das Bild übersichtlicher.

Diese allgemeine Form des Brenngebildes trifft man z. B. auch bei schiefen Bündeln an, welche an centrirten, nicht sphärischen Flächen gebrochen sind.

In Specialfällen vereinfacht sich das Brenngebilde. Sind die Krümmungshalbmesser der einen Richtung gleich, so fallen die Brennlinien, welche dieser Richtung entsprechen, zusammen, wie z. B. in Fig. 3 die Brennlinien φ, χ, ψ. Die resultirende Linie ist im Allgemeinen auch noch eine Curve doppelter Krümmung. Liegt sie in einer Ebene, so resultirt das Brenngebilde, für schiefe Bündel in sphärischen, centrirten brechenden Medien. Mit dieser Form haben wir es hauptsächlich zu thun. Sie ist in den meisten der schon oben besprochenen Figuren der Taf. VI wiederzuerkennen. Wird diese Brennlinie zu einer Geraden, so ist die Trajectorie eine Rotationsfläche und die Drehung hat um die Gerade als Axe stattgefunden. Dies sehen wir in den Figuren 4 und 5. Dann müssen auch die brechenden Flächen Rotationsflächen um diese Axe sein, was bei einer sphärischen Fläche für jedes Strahlenbündel zutrifft, bei den übrigen Rotationsflächen nur für den einen mit der Axe derselben zusammenfallenden Strahl. Ebenso kann bei mehreren centrirten sphärischen oder Rotationsflächen überhaupt eine gerade Gesammt-

brennlinie (φ, χ, ψ zusammenfallend) nur vorhanden sein, wenn die einfallenden Strahlen von einem in der Axe gelegenen Leuchtpunkte herkommen. Die Gesammtbrennlinie (φ, χ, ψ) deckt dann diese Axe. Der letztere Punkt ergiebt sich sofort aus einer Betrachtung der Fig. 1 Taf. I und ist auch bei Besprechung derselben schon erwähnt worden.

Es sei NA eine beliebige Curve, AC die Axe derselben, φA ein einfallender Strahl, bei N und M treten zwei andere Strahlen desselben Bündels ein, die, beliebig gebrochen, irgendwo die Axe schneiden müssen, z. B. in $a_7 a_6$. Lassen wir nun das Ganze um die Axe rotiren, so ist ersichtlich, dass alle in dem Kreise, welchen N beschreibt, eintretenden Strahlen sich in der Axe, und zwar in a_7, schneiden müssen, ebenso die in dem durch M erzeugten Kreise in a_6, dass also in der That die zweiten Brennlinien mit der Axe zusammenfallen. Die stereoskopische Figur 5 Taf. XI erläutert diese paraxiale Brechung an einer sphärischen Fläche oder in einem System centrirter Rotationsflächen. Dass die zweiten Brennlinien auch nach einer weiteren Brechung in einer Ebene liegen, sobald sich das Krümmungscentrum der neuen brechenden Fläche in der Einfallsebene befindet, haben wir oben S. 17 auseinandergesetzt. Es kann immer die Verbindungslinie jedes Leuchtpunktes der zweiten Brennlinie nach der ersten Brechung mit dem Krümmungscentrum der zweiten Fläche als Axenstrahl eines von diesem Leuchtpunkte ausgehenden einfallenden Bündels betrachtet werden, auf welchem das Bild der zweiten Brennlinie nach erster Brechung, d. h. die zweite Brennlinie nach zweiter Brechung, liegen muss. Alle Brenngebilde eines Systems in einer Axe centrirter Medien mit sphärischen Trennungsflächen haben in Folge dessen stets die Gestalt, wie sie in den Figuren 4. 5. 6 Taf. VI und in der stereoskopischen Figur 3 Taf. XI wiedergegeben wurde: eine scharfe, in der Einfallsebene gelegene Schneide, zusammengesetzt aus den zweiten Brennlinien und ein senkrecht zur Einfallsebene stehendes Band, welches durch die ersten Brennlinien gebildet wird. Darf die Dicke des Bündels nicht vernachlässigt werden, so sind die einzelnen ersten Brennlinien gekrümmt zu denken.

Die stereoskopische Figur 3 Taf. XI zeigt also das Brenngebilde schiefer Bündel in einem System centrirter sphärischer Flächen. Sind auch in der zweiten Richtung die Krümmungsradien einer jeden der Normalenflächen unter sich gleich, so fallen auch die Brennlinien x, y, z zu einer Gesammtbrennlinie zusammen, und wir erhalten das Brenngebilde, welches Fig. 6 zeigt, wobei aber zu bemerken ist, dass im Allgemeinen die beiden Gesammtbrennlinien auch hier Curven doppelter Krümmung sind. Wenn sie zu Geraden werden, haben wir die gewöhnliche astigmatische Brechung vor uns, und das Gesammtbündel wird ebenso gebrochen, wie das unendlich dünne Bündel.

Drei Punkte, welche später ausführlicher besprochen werden, mögen hier vorläufige Erwähnung finden. Es ist dies erstens die Frage, in wie weit und in welcher Weise eine Reduction des Brenngebildes zu einem Punkte, das heisst homocentrische Brechung, erreichbar ist. Ohne Weiteres leuchtet ein, dass dies nur möglich ist, wenn die Medien radiär zur Axe des Bündels angeordnet sind. Da sie dies im thierischen Auge zur Hauptaxe sind, so kann längs den Nebenaxen also für schiefe Bündel homocentrische Brechung nicht stattfinden.

Der zweite Punkt betrifft die Bilderzeugung durch nebeneinander gelagerte Brenngebilde. Die Umrisse der Querschnitte der letzteren sind keine Zerstreuungskreise, sondern sehr verschieden geformt. Ausserdem ist die Intensität des Lichtes auf den Querschnitten ungleichmässig vertheilt. Je nach der Anordnung der Leuchtpunkte im Objekt werden auch Schnitte durch die Brenngebilde in verschiedener Höhe für die Formung des Bildes günstiger sein. In einem System centrirter sphärischer Flächen wird z. B. von einer in der Einfallsebene liegenden Leuchtlinie das relativ schärfste Bild dann erhalten werden, wenn der auffangende Schirm durch die Brenngebilde in der Nähe der zweiten Brennlinien, der Caustica interna, gelegt ist. Für zur Einfallsebene senkrechte Leuchtlinien liefern dagegen die Querschnitte in der Nähe der ersten Brennlinien bessere Bilder. Gerade umgekehrt verhält es sich, wenn in Linien angeordnete Leuchtpunkte als diskrete Punkte unterschieden werden sollen. Die Bilder von in der Einfallsebene gelegenen Leuchtpunkten fliessen in einander auf den in der Höhe der zweiten Brennlinien ge-

machten Schnitten und erscheinen gesondert auf denjenigen in der Höhe der ersten. Endlich der dritte Punkt, welcher für die Form des Brenngebildes von Wichtigkeit ist, ist die Lage desjenigen Punktes der Caustica interna, in welchem dieselbe einen Schnabel bildet. In den stereoskopischen Bildern konnte die Umkehr dieser Curve nicht dargestellt werden, weil dadurch Unklarheit hervorgerufen worden wäre. Dagegen ist sie in den Figuren 2. 3. 4 auf Tafel VI wiedergegeben. Der rückkehrende Arm der Caustica ist bei den dickeren Linsen Taf. IV und V vorhanden, während er bei den flachen Taf. III und VI in Fortfall kommt. Es reicht dann die Caustica vom Central- bis Radialstrahl, und die erste Brennlinie des letzteren bezeichnet den Punkt, wo die Rückläufigkeit der Caustica beginnen würde.

Der rückläufige Arm der Caustica bedingt natürlich eine grössere Complicirtheit des Brenngebildes. Dasselbe wird sanduhrförmig, mit zwei breiten Enden und einer kurzen Einschnürung in der Einfallsebene dazwischen. Wo der rückläufige Arm der Caustica fehlt, ist das Brenngebilde schlanker und in die Länge gezogen. Die letztere Form tritt uns beim menschlichen Auge entgegen. In der wirklichen menschlichen Linse verjüngt sich in Folge der Schichtung das Brenngebilde sogar noch mehr, als in der homogenen flachen Linse, und es scheint, als wenn dadurch der Zweckmässigkeit am besten entsprochen würde, denn die Schnitte des schlanken Brenngebildes auf dem auffangenden Schirm bleiben auch bei Verschiebung des letzteren annähernd gleich gross, und zwar von geringer Ausdehnung, während die Sanduhrform, je nach der Lage des Schirmes, sehr verschiedene Schnitte liefert.

13. Berechnung.

Nachdem wir im Vorhergehenden gezeigt haben, dass das Brenngebilde eines unendlich dünnen Strahlenbündels, falls die einzelnen Strahlen desselben zu irgend einer Fläche senkrecht stehen, immer sich an zwei in zu einander senkrechten Ebenen gelegene Brennlinien anlehnt, handelt es sich darum, die Lage und Entfernung dieser Brennlinien zu berechnen, wodurch das ganze Brenngebilde bekannt ist.

Die allgemeinen Formeln lassen sich aus dem Malus'schen Gesetz oder auch direkt aus dem Princip des kleinsten Kraftaufwandes herleiten.

Obgleich diese Ableitungen nicht einfach sind und auch praktisch die allgemeinen Formeln kaum Verwendung finden dürften, sollen sie doch der Vollständigkeit wegen hier entwickelt werden, da die Schriften, in denen ihre Ableitung gegeben wird, verhältnissmässig wenig zugänglich sind.

Ableitung der allgemeinen Formeln aus dem Malus'schen Gesetz.

Wir knüpfen an die Gleichungen 5 (Seite 27) an, welche die Beziehungen zwischen dem einfallenden und gebrochenen Strahlenbündel hinsichtlich ihrer Richtung ausdrückten:

$$\frac{\beta c - b\gamma}{m} = \frac{\beta_1 c - b\gamma_1}{n}; \quad \frac{\alpha c - a\gamma}{m} = \frac{\alpha_1 c - a\gamma_1}{n}$$

und suchen zu bestimmen, wo dieser Strahl durch einen unendlich nahen zweiten Strahl getroffen wird.

Betrachtet man auf der brechenden Fläche S einen anderen, dem ersten (O) unendlich nahe gelegenen Einfallspunkt M, so erfahren die Cosinusse gleichzeitige Anwüchse, und man erhält:

$$\frac{1}{m}(\gamma da + a d\gamma - c d\alpha - \alpha dc) = \frac{1}{n}(\gamma_1 da + a d\gamma_1 - c d\alpha_1 - \alpha_1 dc)$$

$$\frac{1}{n}(\gamma db + b d\gamma - c d\beta - \beta dc) = \frac{1}{n}(\gamma_1 db + b d\gamma_1 - c d\beta_1 - \beta_1 dc).$$

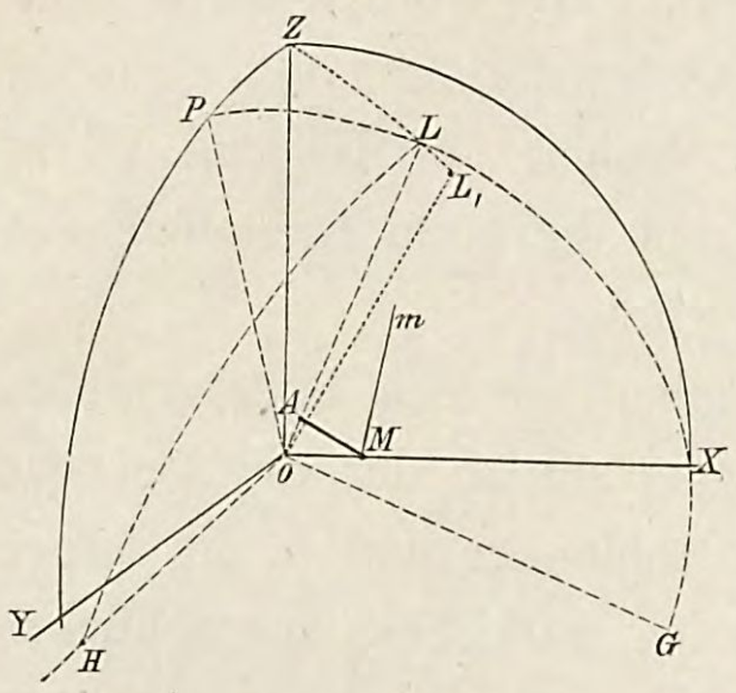
Nehmen wir nun zum Anfangspunkt des Coordinatensystems den ersten Einfallspunkt O, zur z-Axe die Normale OZ zur Fläche S, zur xz-Ebene die Ebene ZOM — M liegt dann auf der Axe OX —, so werden für dieses Axensystem $a = 0$; $b = 0$; $c = 1$; $\gamma = \cos\eta$; $\gamma_1 = \cos\eta_1$; $dc = 0$, weil $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ist. Die vier Gleichungen nehmen diese Gestalt an:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha_1}{n}; \quad \frac{\beta}{m} = \frac{\beta_1}{n} \qquad \frac{1}{m}(\gamma da - d\alpha) = \frac{1}{n}(\gamma_1 da - d\alpha_1); \quad \frac{1}{m}(\gamma db - d\beta) = \frac{1}{n}(\gamma_1 db - d\beta_1).$$

Es sind die geometrischen Werthe der Differentiale zu suchen.

Für beliebige Axen ist das Verhältniss a : c in Bezug auf die Normale der Fläche S im Punkte O gleich der Tangente des Winkels zwischen der Projection dieser Normale auf die xz-Ebene und der z-Axe. Im gegenwärtigen Falle deckt sich die Normale mit der z-Axe und ist jenes Verhältniss $= 0$. Für die unendlich nahe, im M errichtete Normale ist die analoge Grösse $\frac{a + da}{c + dc} = da =$ der Tangente des unendlich kleinen Winkels oder gleich diesem Winkel selbst, welchen diese zweite Normale mit der z-Axe oder der ersten Normale einschliesst. Dieser Winkel ist $= \delta : \varrho$, wenn δ den unendlich kleinen Abstand OM bedeutet und ϱ den Krümmungshalbmesser des durch die Ebene ZOX in der Fläche S gemachten normalen Schnittes. Denn der Krümmungsmittelpunkt dieses Schnittes ist der Punkt, wo die Normale OZ zusammentrifft mit der im Punkte M auf der Curve OM normalen Ebene, und diese Ebene ist diejenige, welche die Normale in M auf die Ebene ZOM projicirt. Also $da = \frac{\delta}{\varrho} = \delta\left(\frac{\cos^2\omega}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\omega}{\varrho_2}\right)$, wenn man mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche S für den Punkt O bezeichnet und mit ω den Winkel zwischen der Ebene ZOX und der Ebene des Hauptschnittes von S, welcher die kleinste Krümmung $1 : \varrho_1$ besitzt.

Fig. 12.



Setzen wir an die Stelle der Fläche wieder das Rotationsparaboloid $z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$, so haben wir Seite 34 für die Richtungscosinusse einer im Punkte M, welcher dem Punkte O unendlich nahe, um δ, entfernt liegt, errichteten Normale gefunden:

$$\cos\lambda = r\delta;\quad \cos\mu = s\delta;\quad \cos\nu = -1.$$

Nehmen wir eine Coordinatentransformation vor durch Drehung um die z-Axe im Betrag eines Winkels ϑ, so tritt an die Stelle der Gleichung $2z = (rx^2 + 2sxy + ty^2)$, da $x = x_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta$, $y = x_1\sin\vartheta + y_1\cos\vartheta$, folgende:

$$x_1^2(r\cos^2\vartheta + t\sin^2\vartheta + 2s\sin\vartheta\cos\vartheta) + x_1y_1(-2r\sin\vartheta\cos\vartheta + 2t\sin\vartheta\cos\vartheta + 2s\cos^2\vartheta - 2s\sin^2\vartheta)$$
$$+ y_1^2(r\sin^2\vartheta + t\cos^2\vartheta + 2s\sin\vartheta\cos\vartheta) = 2z.$$

Setzt man für die Grössen in der Klammer entsprechend R, S, T, so ergiebt sich: $2z = Rx_1^2 + 2Sx_1y_1 + Ty_1^2$. Durch Einsetzen der Werthe in die Formeln für die Cosinusgleichungen folgt:

$$\cos\lambda = R\delta = \frac{\delta}{2}(r\cos^2\vartheta + t\sin^2\vartheta + s\sin 2\vartheta) \qquad \cos\mu = S\delta = \frac{\delta}{2}[(t - r)\sin 2\vartheta + 2s\cos 2\vartheta].$$

Es ist aber μ der Winkel, welchen die Normale mit der y-Axe macht, also das Complement des Winkels, welchen die Normale mit der xz-Ebene bildet. Nehmen wir an, bei der Transformation habe eine Drehung stattgefunden, so dass die Axen x und y jetzt Tangenten an den Hauptschnitte sind. Es muss bekanntlich sein $\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2s}{r - t} = \operatorname{tg} 2\omega$. Dann wird $s = 0$ und

$$\cos\lambda = \frac{\delta}{2}(r\cos^2\omega + t\sin^2\omega),\quad \cos\mu = \frac{\delta}{2}(t - r)\sin 2\omega. \quad \text{Da } r = \frac{1}{\varrho_1} \text{ und } t = \frac{1}{\varrho_2}, \text{ folgt:}$$

$$\cos\lambda = \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\omega + \frac{1}{\varrho_2}\sin^2\omega\right),\quad \cos\mu = \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin 2\omega.$$

Nun macht die in M errichtete Normale mit der y-Axe einen Winkel, dessen Cosinus $b + db$ oder, da hier $b = 0$, einfach db ist; dies ist aber derselbe Winkel, welchen wir mit μ bezeichneten; sein Cosinus ist gleich dem Sinus des Winkels, welchen die Normale M mit ihrer Projection auf die xz-Ebene bildet. Also: $db = \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin 2\omega$. Jetzt ist noch $d\alpha$ und $d\beta$ zu berechnen. Wir legen durch den einfallenden Strahl OL und OX eine Ebene, ziehen in derselben OG senkrecht zu OL, und errichten zu dieser Ebene die Normale OH. Nehmen wir zunächst einen beliebigen Strahl an, welcher mit den Axen OL, OG und OH beziehendlich die Richtungscosinusse g. h. k., mit OX den Richtungscosinus α bildet, so hat man:

$$\alpha = g\cos GOX + h\cos HOX + k\cos LOX.$$

Nun ist $\qquad \cos GOX = \sin LOX,\ \cos HOX = 0 \qquad \alpha = g\sin LOX + k\cos LOX;$

ebenso ergiebt sich für den Cosinus des Winkels, den der einfallende Strahl mit OY macht,

$$\beta = g\cos GOY + h\cos HOY + k\cos LOY.$$

Für einen unendlich nahen zweiten Strahl folgt:

$$d\alpha = dg\sin LOX + dk\cos LOX;\quad d\beta = dg\sin GOY + dh\cos HOY + dk\cos LOY.$$

Lassen wir nun den Hauptstrahl mit OL zusammenfallen, der benachbarte sei der in M eintretende, so wird $g = 0$, $h = 0$, $k = 1$, und $dk = 0$. Betrachten wir von allen Normalflächen, zu denen die einfallenden Strahlenbündel senkrecht sind, die durch M gehende, welche den Strahl OL in A_1 unter rechtem Winkel durchschneidet und projiciren wir den Strahl, welcher in M eintritt, auf die Ebene LOG, so ist dg der Cosinus des Winkels zwischen der Projection und OG, also gleich dem Sinus des Complements oder, da der Winkel sehr klein ist, gleich dem Winkel selbst zwischen der Projection und OL. Die projicirende Ebene schneidet aber den Strahl OL im Krümmungsmittelpunkt des Schnittes MA der Oberfläche A. Der Winkel zwischen der Projection und

OL ist somit $=$ AM dividirt durch den Krümmungshalbmesser, da $OM = \delta$, also $= \delta \sin LOX : R$. Dieser Halbmesser weicht unendlich wenig ab vom Halbmesser w des Schnittes, welchen die Ebene LOG in die im Punkte O die einfallenden Strahlen normal durchsetzende Fläche macht, für welchen $\frac{1}{w} = \frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f}$, wenn man mit F und f die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche A für den Punkt O bezeichnet, mit φ den Winkel, welchen die Ebene LOG mit dem Hauptschnitte (F) macht.

Es sei Winkel $LOX = \chi$, dann ist $dg = \frac{\delta \sin \chi}{w} = \delta \sin \chi \left(\frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f} \right)$, mithin, da $dk = 0$,

$$d\alpha = \delta \sin^2 \chi \left(\frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f} \right). \qquad d\beta = dg \cos GOY + dh \cos HOY.$$

dh ist der Cosinus des Winkels, welchen der Strahl M mit OH macht, also gleich dem Sinus des unendlich kleinen Winkels zwischen dem Strahl und seiner Projection auf LOG. Für den analogen Cosinus erhielten wir oben den Werth:

$db = \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \sin 2\omega$. Setzen wir die entsprechenden Werthe des Schnittes MA ein, so folgt:

$dh = \frac{1}{2} MA \left(\frac{1}{f - OA} - \frac{1}{F - OA} \right) \sin 2\varphi$. Mit Vernachlässigung des unendlich Kleinen, und da $MA = \delta \sin \chi$, ergiebt sich:

$$dh = \frac{1}{2} \delta \sin \chi \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{F} \right) \sin^2 \varphi.$$

Es handelt sich jetzt noch um die Winkel GOY und HOY. Die Ebene LOG schneidet die Fläche ZOY in OP.

In der rechtwinkligen Ecke OG, OY, OP, ist $\cos GOY = \cos GOP \cdot \cos YOP = - \cos LOX \cdot \sin ZOP$.

ZOP ist der Kantenwinkel zwischen den Ebenen ZXO und PGO. In der Ecke OZ, OL, OX ist

$$\cos LOX = \cos ZOX \cos ZOL + \sin ZOX \sin ZOL \cos LZX \qquad \cos LOX = \sin ZOL \cos LZX.$$

Bezeichnen wir den letzten Winkel (den Kantenwinkel zwischen ZOX und $ZOLL_1$) mit ε, den Einfallswinkel ZOL mit η:

$$\cos LOX = \sin \eta \cos \varepsilon. \qquad \sin ZXL \text{ oder } \sin ZOP : \sin LZX = \sin ZOL : \sin LOX$$

$$\sin ZOP = \frac{\sin \eta \sin \varepsilon}{\sin \chi}; \quad \cos GOY = - \cos LOX \cdot \sin ZOP = - \frac{\sin^2 \eta \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin \chi}$$

$$dg \cos GOY = - \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f} \right) \sin^2 \eta \sin 2\varepsilon.$$

Der Winkel HOY ist gleich dem Kantenwinkel der Ebenen ZOX und $LOX = ZOP$. Das rechtwinklige sphärische Dreieck liefert folgende Gleichungen: $\cos ZOL = \sin LOX \cdot \cos ZOP$; $\cos \eta = \sin \chi \cos HOY$, so dass

$$dh \cos HOY = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{F} \right) \sin 2\varphi \cos \eta \quad \text{und} \quad d\beta = - \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f} \right) \sin^2 \eta \sin 2\varepsilon + \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{F} \right) \sin 2\varphi \cos \eta.$$

Ebenso erhält man die Werthe von $d\alpha'$ und $d\beta'$. Man hat dabei für den gebrochenen Strahl OL_1 die analogen Grössen $F_1 .\ f_1 .\ \varphi_1 .\ \chi_1 .$ einzuführen. Die Winkel ε und ω sind dieselben. Ausserdem ist $\cos \chi = \sin \eta \cos \varepsilon$; $\cos \chi_1 = \sin \eta_1 \cos \varepsilon$. Alle Werthe eingesetzt in die Formeln, erhält man

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\cos \eta}{\varrho} - \frac{\sin^2 \chi}{w} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \eta_1}{\varrho} - \frac{\sin^2 \chi_1}{w_1} \right)$$

$$\frac{1}{m} \left[\left(\frac{\cos^2 \omega}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \omega}{\varrho_2} \right) \cos \eta - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f} \right) \sin^2 \chi \right] = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\cos^2 \omega}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \omega}{\varrho_2} \right) \cos \eta_1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi_1}{F_1} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{f_1} \right) \sin^2 \chi_1 \right]$$

$$\frac{1}{m} \left[\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \cos \eta \sin 2\omega + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{f} \right) \sin^2 \eta \sin 2\varepsilon - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{F} \right) \sin 2\varphi \cos \eta \right] =$$

$$\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \cos \eta_1 \sin 2\omega + \left(\frac{\cos^2 \varphi_1}{F_1} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{f_1} \right) \sin^2 \eta_1 \sin 2\varepsilon - \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{F_1} \right) \sin 2\varphi_1 \cos \eta_1 \right].$$

Lässt man die Einfallsebene $ZOLL_1$ mit der Hauptschnittebene ZOX der Fläche S zusammenfallen, so wird χ das Complement von η (χ_1 von η_1); dann giebt die erste Formel:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\cos \eta}{\varrho} - \frac{\cos^2 \eta}{w} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \eta_1}{\varrho} - \frac{\cos^2 \eta_1}{w_1} \right) \quad \text{oder} \quad w_1 = \frac{\frac{m}{n} \varrho \cos^2 \eta_1}{\frac{m}{n} \cos \eta_1 - \cos \eta + \frac{\varrho}{w} \cos^2 \eta}.$$

Betrachtet man die im zweiten Hauptschnitte einfallenden Strahlen, d. h. es sei OM senkrecht zu ZOL, so wird $\chi = \chi_1 = 90^0$:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\cos \eta}{\varrho} - \frac{1}{w} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{\cos \eta_1}{\varrho} - \frac{1}{w_2} \right) \quad \text{oder} \quad w_2 = \frac{\frac{m}{n} \varrho}{\frac{m}{n} \cos \eta - \cos \eta_1 + \frac{\varrho}{w}}.$$

Ableitung der allgemeinen Formeln aus dem Princip des kleinsten Zeitaufwandes.

Neumann[1]) hat eine vollständige, auf dem Princip des kürzesten Zeitaufwandes gegründete Ableitung der Brechung gegeben. Dieselbe soll deshalb hier mitgetheilt werden, obgleich sie grössere mathematische Kenntnisse voraussetzt. Es werden zwar auch die beiden Focallinien eines dünnen Bündels als zum Hauptstrahl senkrechte Gerade angenommen, doch ist die Ableitung vollkommen streng, solange das Bündel als ein unendlich dünnes charakterisirt bleibt.

Von einem im ersten Medium gegebenen Punkte (a. b. c.) falle ein Strahl auf die brechende Fläche f und gehe nach der Brechung durch den gegebenen Punkt ($a_1 . b_1 . c_1$). Die Weglänge im ersten Medium sei $= r$, im zweiten $= r_1$, die Indices n und n_1, der Incidenzpunkt auf der Fläche f habe die Coordinaten x. y. z.

Dann ist $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ und $r_1^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2$.

Es soll also der Punkt x. y. z. so gewählt werden, dass $n r + n_1 r_1$ ein Minimum wird, unter der Nebenbedingung, dass der Gleichung $f(x, y, z) = 0$, der gegebenen brechenden Fläche, genügt werde. Wenn λ einen unbekannten Factor vorstellt, erhalten wir die Gleichungen:

$$n\frac{dr}{dx} + n_1\frac{dr_1}{dx} = \lambda\frac{df}{dx} \qquad n\frac{dr}{dy} + n_1\frac{dr_1}{dy} = \lambda\frac{df}{dy} \qquad n\frac{dr}{dz} + n_1\frac{dr_1}{dz} = \lambda\frac{df}{dz} \quad \text{und} \quad f(x.y.z.) = 0.$$

Differenziren wir die Gleichungen $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ $\quad r_1^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2$ nach einander nach x. y. z., so ergiebt sich $\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r}$. Dies ist der Richtungscosinus mit der x-Axe. Derselbe sei $= A$.

Ebenso erhalten wir $\frac{dr}{dy} = B$, $\frac{dr}{dz} = C$, $\frac{dr_1}{dx} = A_1$, $\frac{dr_1}{dy} = B_1$, $\frac{dr_1}{dz} = C_1$. Die Formeln werden dann:

$$nA - n_1 A_1 = \lambda\frac{df}{dx} \qquad nB - n_1 B_1 = \lambda\frac{df}{dy} \qquad nC - n_1 C_1 = \lambda\frac{df}{dz} \quad \text{und} \quad f(x.y.z.) = 0.$$

Für einen Nachbarstrahl erhalten wir durch Differentiation die totalen Differentiale

$$n\,dA - n_1\,dA_1 = \lambda\left(\frac{d^2f}{dx^2}dx + \frac{d^2f}{dx\,dy}dy + \frac{d^2f}{dx\,dz}dz\right) + \frac{df}{dx}d\lambda$$

$$n\,dB - n_1\,dB_1 = \lambda\left(\frac{d^2f}{dy\,dx}dx + \frac{d^2f}{dy^2}dy + \frac{d^2f}{dy\,dz}dz\right) + \frac{df}{dy}d\lambda \qquad \text{und} \quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0.$$

$$n\,dC - n_1\,dC_1 = \lambda\left(\frac{d^2f}{dz\,dx}dx + \frac{d^2f}{dz\,dy}dy + \frac{d^2f}{dz^2}dz\right) + \frac{df}{dz}d\lambda$$

Wir nehmen x, y, z zum Anfangspunkt des Coordinatensystems, die Normale der Fläche in diesem Punkte zur z-Axe, und setzen ausserdem an Stelle der Fläche das osculirende Paraboloid $f = \frac{ax^2 + by^2 + 2cxy}{2} - z = 0$. (a. b. c. sind hier neue Constanten.) Da $x = y = z = 0$ und somit

$$\lambda\frac{df}{dx} = \lambda(ax + cy) = 0 \qquad \lambda\frac{df}{dy} = \lambda(by + cx) = 0 \qquad \lambda\frac{df}{dz} = -\lambda,$$

so folgt:

$$nA - n_1 A_1 = 0 \qquad n\,dA - n_1\,dA_1 = \lambda(a\,dx + c\,dy)$$
$$nB - n_1 B_1 = 0 \qquad n\,dB - n_1\,dB_1 = \lambda(c\,dx + b\,dy)$$
$$n\Gamma - n_1\Gamma_1 = -\lambda \qquad n\,d\Gamma - n_1\,d\Gamma_1 = -d\lambda \qquad \text{und} \quad dz = 0.$$

Man lege durch die Normale z und den einfallenden Strahl eine Ebene, der Winkel, welchen dieselbe mit der x-Axe bildet, sei φ. Eine analoge Ebene sei durch den gebrochenen Strahl und die Normale z gelegt, der Winkel zwischen derselben und der x-Axe sei φ_1. Bezeichnen wir die Brechungswinkel mit ω und ω_1, so lassen sich die Richtungscosinusse durch die Winkel φ; ω; φ_1; ω_1; ausdrücken.

$$A = \sin\omega\cos\varphi \qquad A_1 = \sin\omega_1\cos\varphi_1 \qquad \text{ausserdem:} \quad dA = \cos\omega\cos\varphi\,d\omega - \sin\omega\sin\varphi\,d\varphi$$
$$B = \sin\omega\sin\varphi \qquad B_1 = \sin\omega_1\sin\varphi_1 \qquad dB = \cos\omega\sin\varphi\,d\omega + \sin\omega\cos\varphi\,d\varphi$$
$$\Gamma = \cos\omega \qquad \Gamma_1 = \cos\omega_1 \qquad d\Gamma = -\sin\omega\,d\omega;$$

und die analogen für dA_1 u. s. w.

Es ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{B}{A} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$$

[1]) C. Neumann, Ueber die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels. Berichte d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Math. Phys. Cl. 1. März 1880.

folglich $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_1$ und $\varphi = \varphi_1$. Also liegt einfallender und gebrochener Strahl in einer Ebene. Wir drehen das Coordinatensystem um den $\measuredangle\,\varphi$, so dass die Einfallsebene zur xz-Ebene wird. Die Formeln erhalten dann folgende Gestalt:

$$A = \sin\omega \qquad dA = \cos\omega\, d\omega \qquad A_1 = \sin\omega_1 \qquad dA_1 = \cos\omega_1\, d\omega_1$$
$$B = 0 \qquad dB = \sin\omega\, d\varphi \qquad B_1 = 0 \qquad dB_1 = \sin\omega_1\, d\varphi_1$$
$$\Gamma = \cos\omega \qquad d\Gamma = -\sin\omega\, d\omega \qquad \Gamma_1 = \cos\omega_1 \qquad d\Gamma_1 = -\sin\omega_1\, d\omega_1.$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen ein

$$n\sin\omega - n_1\sin\omega_1 = 0 \qquad n\cos\omega\, d\omega - n_1\cos\omega_1\, d\omega_1 = \lambda(a\,dx + c\,dy)$$
$$0 = 0 \qquad n\sin\omega\, d\varphi - n_1\sin\omega_1\, d\varphi_1 = \lambda(c\,dx + b\,dy)$$
$$n\cos\omega - n_1\cos\omega_1 = -\lambda \qquad -n\sin\omega\, d\omega + n_1\sin\omega_1\, d\omega_1 = -d\lambda \quad \text{und} \quad dz = 0.$$

Der einfallende Hauptstrahl Σ habe den Einfallspunkt (0.0.0) und die Richtungscosinusse $(A.B.\Gamma)$. Gegeben seien die beiden zu einander senkrechten Brennlinien σ und σ', die von (0.0.0) auf den einfallenden Strahl in der Richtung des fortschreitenden Lichtes aufgetragenen zugehörigen Abscissen l und l'. Die Ebene $\Sigma\sigma$ sei gegen die xz-Ebene im Winkel χ geneigt. Für die Richtungscosinusse der Brennlinien σ und σ' erhält man die Werthe:

$$\alpha = \cos\omega\cos\chi \qquad \alpha_1 = -\cos\omega\sin\chi$$
$$\beta = \sin\chi \qquad \beta_1 = \cos\chi$$
$$\gamma = -\sin\omega\cos\chi \qquad \gamma_1 = \sin\omega\sin\chi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\alpha'\,dA + \beta'\,dB + \gamma'\,d\Gamma = -\sin\chi\, d\omega + \cos\chi\sin\omega\, d\varphi \qquad \alpha\,dA + \beta\,dB + \gamma\,d\Gamma = \cos\chi\, d\omega + \sin\chi\sin\omega\, d\varphi.$$

Wir gehen nun zu einem Nachbarstrahl (dx. dy. dz) über, welcher ebenfalls durch die beiden Brennlinien gehen muss. Bezeichnet man seine gesuchten Kreuzungspunkte mit denselben mit $(\xi.\eta.\zeta)$ und $(\xi'.\eta'.\zeta')$, so kann man vom Anfangspunkte des Coordinatensystems zu denselben erstens längs des Hauptstrahles und zweitens längs des Nachbarstrahles gelangen. Bezeichnet man mit $d\sigma$ die unendlich kurze Strecke der Brennlinie, so sind die Coordinaten des Punktes $(\xi.\eta.\zeta)$ einmal gleich den Projectionen des Hauptstrahles l auf die Coordinatenaxen, zuzüglich der Projection der Strecke $d\sigma$:

$$\xi = Al + \alpha\,d\sigma = dx + (A + dA)(l + dl) \qquad \eta = Bl + \beta\,d\sigma = dy + (B + dB)(l + dl)$$
$$\gamma = \Gamma l + \gamma\,d\sigma = dz + (\Gamma + d\Gamma)(l + dl).$$

Zweitens sind dieselben gleich den Projectionen des Nebenstrahles (Richtungscosinus: $A + dA$, $B + dB$, $\Gamma + d\Gamma$. Weglänge: $l + dl$), zuzüglich derjenigen der unendlich kurzen Entfernung des Nachbarpunktes (dx. dy. dz) vom Anfangspunkte. Es folgt $\quad \alpha\,d\sigma = dx + l\,dA + A\,dl \qquad \beta\,d\sigma = dy + l\,dB + B\,dl \qquad \gamma\,d\sigma = dz + l\,d\Gamma + \Gamma\,dl$

und durch Multiplication mit $(\alpha'\beta'\gamma')$ $\quad \alpha'\,dx + \beta'\,dy + \gamma'\,dz + l(\alpha'\,dA + \beta'\,dB + \gamma'\,d\Gamma) = 0.$

In analoger Weise ergiebt sich für $(\xi'\eta'\zeta')$: $\quad \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + l'(\alpha\,dA + \beta\,dB + \gamma\,d\Gamma) = 0.$

Wir setzen $\frac{1}{l} = L$ und $\frac{1}{l'} = L'$:

$$-\sin\chi\, d\omega + \cos\chi\sin\omega\, d\varphi = -L(-\sin\chi\cos\omega\, dx + \cos\chi\, dy)$$
$$\cos\chi\, d\omega + \sin\chi\sin\omega\, d\varphi = -L'(\cos\chi\cos\omega\, dx + \sin\chi\, dy)$$
$$d\omega = -[(L\sin^2\chi + L'\cos^2\chi)\cos\omega\, dx + (L' - L)\sin\chi\cos\chi\, dy]$$
$$\sin\omega\, d\varphi = -[(L' - L)\sin\chi\cos\chi\cos\omega\, dx + (L\cos^2\chi + L'\sin^2\chi)\, dy]$$

oder $d\omega = -(A\cos\omega\, dx + C\, dy)$; $\sin\omega\, d\varphi = -(C\cos\omega\, dx + B\, dy)$, wenn:

$$A = L\sin^2\chi + L'\cos^2\chi \qquad B = L\cos^2\chi + L'\sin^2\chi \qquad C = (L' - L)\sin\chi\cos\chi.$$

Ausserdem ist

$$L + L' = A + B \qquad LL' = AB + C^2;\ \operatorname{tg} 2\chi = \frac{2C}{A - B} \qquad (L - A)(L - B) = C^2 = (L' - A)(L' - B).$$

Setzt man die Werthe von $d\omega$ und $d\varphi$ in die Gleichungen ein, so erhält man die Formeln für das gebrochene Strahlenbündel

$$n_1\cos\omega\, d\omega_1 = -n\cos\omega(A\cos\omega\, dx + C\, dy) - \lambda(a\,dx + c\,dy)$$
$$n_1\sin\omega\, d\varphi_1 = -n(C\cos\omega\, dx + B\, dy) - \lambda(c\,dx + b\,dy)$$

woraus $d\omega_1 = -(A_1\cos\omega_1\, dx + C_1\, dy)$; $\sin\omega_1\, d\varphi_1 = -(C_1\cos\omega_1\, dx + B_1\, dy)$, wenn

$$A_1 = \frac{nA\cos^2\omega + \lambda a}{n_1\cos^2\omega_1} \qquad B_1 = \frac{nB + \lambda b}{n_1} \qquad C_1 = \frac{nC\cos\omega + \lambda c}{n_1\cos\omega_1}$$
$$n_1 A_1\cos^2\omega_1 - nA\cos^2\omega = \lambda a \qquad n_1 B_1 - nB = \lambda b \qquad n_1 C_1\cos\omega_1 - nC\cos\omega = \lambda c.$$

Setzen wir in analoger Weise wie bei dem einfallenden Bündel $\frac{1}{l_1} = L_1$ und $\frac{1}{l'_1} = L'_1$:

$$A_1 = L_1\sin^2\chi_1 + L'_1\cos^2\chi_1 \qquad B_1 = L_1\cos^2\chi_1 + L'_1\sin^2\chi_1 \qquad C_1 = (L'_1 - L_1)\sin\chi_1\cos\chi_1$$

wenn χ_1 der Winkel ist, welchen die Ebene $\Sigma_1\sigma_1$ mit der xz-Ebene bildet. Ausserdem: $L_1 + L'_1 = A_1 + B_1$

$$L_1 L'_1 = A_1 B_1 - C_1{}^2;\ \operatorname{tg}^2\chi_1 = \frac{2C_1}{A_1 - B_1} \qquad (L_1 - A_1)(L_1 - B_1) = C_1{}^2 = (L'_1 - A_1)(L'_1 - B_1).$$

Anwendung auf die Kugelfläche. Die Gleichung der brechenden Fläche sei $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0$. Das osculirende Paraboloid muss hier ein Rotationsparaboloid um die z-Axe sein, und da der Krümmungsradius $= r$ ist, muss der Parameter $= 2r$ sein. Die Gleichung des Paraboloids wird daher $\frac{\frac{1}{r}x^2 + \frac{1}{r}y^2}{2} - z = 0$ und die Coefficienten $a = b = \frac{1}{r}$, $c = 0$. Wir bezeichnen $\frac{1}{r}$ mit R. $n_1 A_1 \cos^2\omega_1 - n A \cos^2\omega = \lambda R$ $\quad n_1 B_1 - n B = \lambda R \quad n_1 C_1 \cos\omega_1 - n C \cos\omega = 0$; da nun $n : n_1 = \frac{1}{\sin\omega} : \frac{1}{\sin\omega_1}$ $\lambda = n_1 \cos\omega_1 - n\cos\omega$, so ist

$$n_1 (A_1 \cos^2\omega_1 - R\cos\omega_1) = n (A\cos^2\omega - R\cos\omega); \quad n_1 (B_1 - R\cos\omega_1) = n (B - R\cos\omega); \quad n_1 (C_1 \cos\omega_1) = n (C\cos\omega)$$

oder

$$\frac{A_1\cos^2\omega_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{A\cos^2\omega - R\cos\omega}{\sin\omega} \qquad \frac{B_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{B - R\cos\omega}{\sin\omega} \qquad \frac{C_1\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{C\cos\omega}{\sin\omega}.$$

Für A. B. C. und $A_1 . B_1 . C_1$. können die Werthe $l . l' . l_1 . l'_1 . \chi$ und χ_1 eingestellt werden.

Denken wir uns eine der Brennlinien in der Einfallsebene liegend, die andere senkrecht zu derselben stehend, so wird $\chi = 90^0$ und $A = L$; $B = L'$; $C = 0$. Folglich $C_1 = 0$ und $\operatorname{tg} 2\chi = 0$, also $\chi_1 = 0^0$ oder 90^0; beide Werthe führen zu demselben Resultate. Es giebt $\chi_1 = 90^0$: $A_1 = L_1$; $B_1 = L'_1$ $\quad \chi_1 = 0$ $A_1 = L'_1$; $B_1 = L_1$. Diese Werthe eingesetzt:

$$\frac{L_1\cos^2\omega_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{L\cos^2\omega - R\cos\omega}{\sin\omega}; \qquad \frac{L'_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{L' - R\cos\omega}{\sin\omega}$$

oder

$$\left(\frac{\cos\omega_1}{l_1} - \frac{1}{r}\right)\frac{\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \left(\frac{\cos\omega}{l} - \frac{1}{r}\right)\frac{\cos\omega}{\sin\omega}; \qquad \left(\frac{1}{l'_1} - \frac{\cos\omega_1}{r}\right)\frac{1}{\sin\omega_1} = \left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos\omega}{r}\right)\frac{1}{\sin\omega}$$

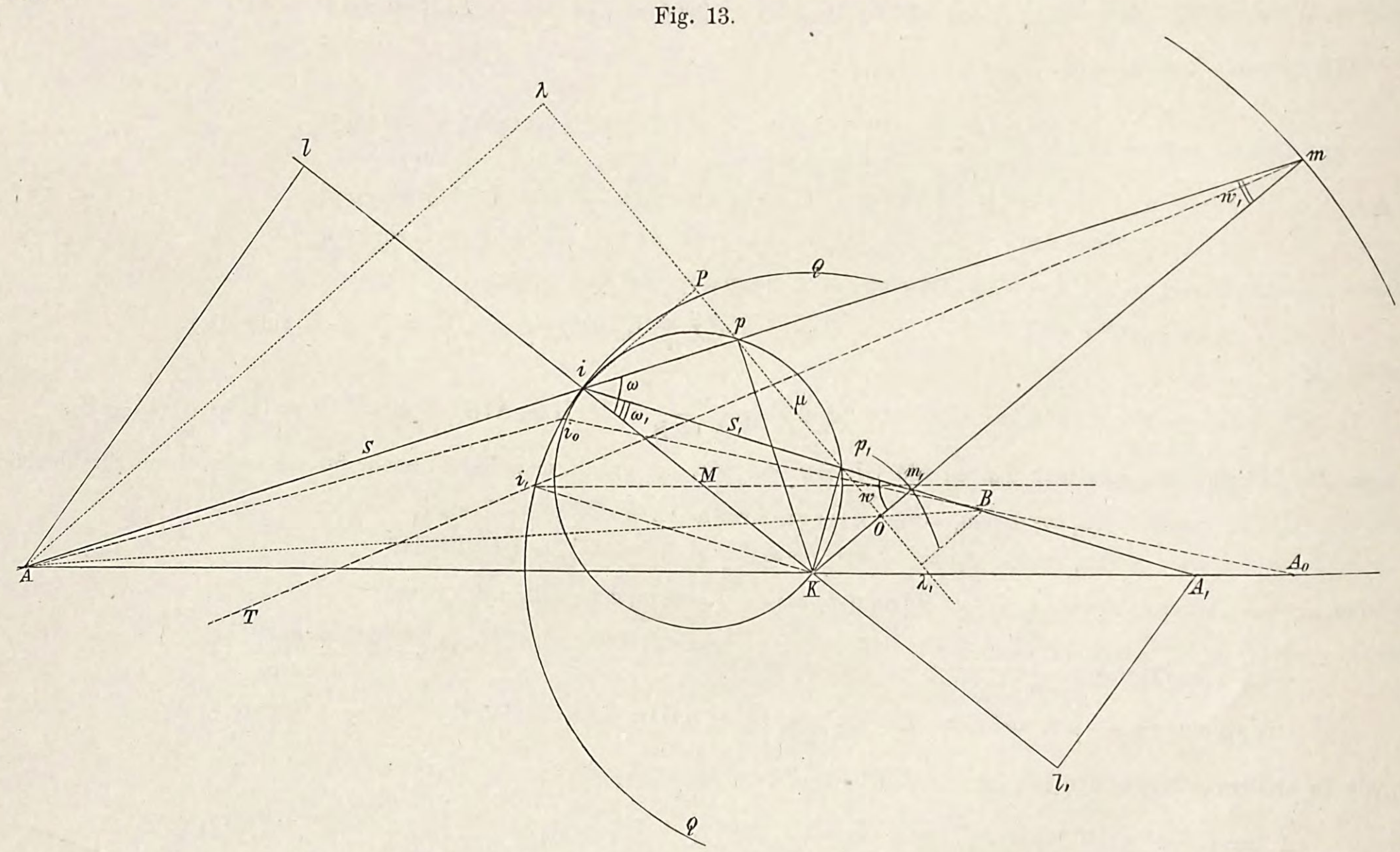
$$\frac{r\cos\omega_1 - l_1}{l_1 \operatorname{tg}\omega_1} = \frac{r\cos\omega - l}{l \operatorname{tg}\omega}; \qquad \frac{r - l'_1\cos\omega_1}{l'_1\sin\omega_1} = \frac{r - l'\cos\omega}{l'\sin\omega}.$$

Die erste Formel gilt für die zur Einfallsebene senkrechten, die zweite für die in derselben liegenden Brennlinien.

Ableitung der Formeln für den Specialfall, dass die Einfallsebene zusammenfällt mit einem der Hauptschnitte der brechenden Fläche.

Wenn wir uns auf den Fall beschränken, wo die Einfallsebene sich mit einem der Hauptschnitte der brechenden Fläche deckt, so ist es möglich, die betreffende Formel mit viel einfacheren Mitteln zu erreichen.

Fig. 13.



Es sei Q eine Curve, i und i_0 zwei unendlich nahe Incidenzpunkte, K der Krümmungsmittelpunkt des Curvenstückes $i i_0$, $A i$ und $A i_0$ zwei einfallende, $i A_1$ und $i_0 A_0$ die gebrochenen Strahlen. Wir ziehen

AKA_1A_0 und denken uns das dünne Strahlenbündel, dessen Brennlinien wir bestimmen wollen, durch Drehung des Strahlensystems um die Axe AKA_1A_0 zu Stande gekommen, alle in dem durch Ai erzeugten Kegelmantel liegenden Strahlen gehen nach der Brechung durch A_1, wie die Ai_0 entsprechenden durch A_0. Die Ai und Ai_0 entsprechenden Kegelmäntel schneiden die Kugel um K je in einer Kreisperipherie. Handelt es sich nur um ein unendlich dünnes Bündel, so kann man an Stelle der Kreise die Tangenten an denselben setzen, welche in i und i_0 senkrecht zur Ebene des Papiers stehen. Alle in der Tangente i einfallenden Strahlen kommen in A_1, alle in i_0 eintretenden in A_0 zur Vereinigung, A_1A_0 ist somit die eine der Brennlinien und durch Zeichnung leicht zu finden, da sie im Schnittpunkte der durch Leucht- und Krümmungsmittelpunkt gezogenen Geraden mit dem gebrochenen Strahl liegt. Wie ersichtlich, behält die Darlegung für jede Rotationsfläche Gültigkeit, K ist als der Krümmungsmittelpunkt des Curvenstückes ii_0 anzusehen. Wir fällen von A und A_1 auf iK die Perpendikel Al und A_1l_1, bezeichnen Ai mit e, iA_1 mit f, Ki mit r, Einfalls- und Brechungswinkel mit ω und ω_1, dann verhält sich:

$$Al : lK = A_1l_1 : l_1K \quad \text{oder} \quad \frac{Al}{li + r} = \frac{A_1l_1}{l_1i - r}; \quad \frac{e \sin\omega}{e\cos\omega + r} = \frac{f \sin\omega_1}{f \cos\omega_1 - r}.$$

Durch einfache Umgestaltung erhält man: $f = \dfrac{r \sin\omega}{\sin(\omega - \omega_1) - \dfrac{r}{e}\sin\omega_1}$ oder, indem man für $\sin\omega$ setzt $n \sin\omega_1$ und Zähler und Nenner durch $\sin\omega_1$ dividirt, die Form $f = \dfrac{nr}{n\cos\omega_1 - \cos\omega - \dfrac{r}{e}}$. Rückt der Leuchtpunkt in unendliche Entfernung, so fällt das Glied, welches e enthält, aus; diesen Specialfall stellt die Fig. 1 auf Tafel I dar.

Schwieriger ist die Ableitung der ersten Brennlinie, in welcher die in der Einfallsebene verlaufenden Strahlen, welche in dem als Tangente anzusehenden unendlich kleinen Bogenstück ii_0 eintreten, sich schneiden. Die erste Brennlinie würde in B liegen. Denken wir uns die Strahlenfigur um AA_1 gedreht, so würde B ein Bogenstück beschreiben, welches, sobald es sich um ein unendlich dünnes Bündel handelt, als eine zur Einfallsebene in b senkrechte kurze Linie angesehen werden kann.

Die bequemste und anschaulichste Ableitung erhält man vermittelst der Geometrie der Lage. Des allgemeineren Verständnisses wegen schicke ich die nöthigen Sätze voraus.

§ 1. Liegen in einer geraden Linie drei Punkte A, B, C und bezeichnet man die Richtung von A nach C als positiv, diejenige von C nach A als negativ, so hat man die Gleichungen: $AC + CA = 0$; $AB + BC + CA = 0$. Multiplicirt man die erste Gleichung mit BC, die zweite mit CD und addirt dann beide: $AB \cdot CD + BC(AC + CD) + CA(BC + CD) = 0$. Ist nun D ein vierter Punkt der Geraden, so ist $AC + CD = AD$ und $BC + CD = BD$. Es folgt:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

§ 2. Sind Oa und Ob zwei einen Winkel einschliessende Strahlen und bezeichnet man die Drehung von a nach b als positiv, so hat man $ab + ba = 0$, und kommt noch ein dritter Strahl hinzu, $ab + bc + ca = 0$.

§ 3. Sind von einem Punkte O nach den vier Punkten ABCD einer Geraden Linien gezogen, so verhalten sich die Dreiecke, welche ihre Spitzen in O haben, wie ihre Grundlinien. Es gilt die Gleichung: $OAB \cdot OCD + OAC \cdot ODB + OAD \cdot OBC = 0$. Nun ist $OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin ab$. Drückt man in der vorletzten Formel die Dreiecke durch die letzte Formel aus und lässt den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{4} OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD$ weg, so erhält man die Gleichung:

$$\sin ab \cdot \sin cd + \sin ac \sin db + \sin ad \sin bc = 0.$$

§ 4. Sind auf einer Geraden zwei Punkte A und B gegeben, so ist ein dritter C unzweideutig durch das Verhältniss $\frac{AC}{CB} = \lambda$ bestimmt. Durch ein Doppelverhältniss sind vier Punkte bestimmt. Ist $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \lambda_1$, so ist $\frac{CD}{DA} = \lambda_1 \frac{BC}{AB} = \lambda_2$.

§ 5. Gehen durch einen Punkt O mehrere Gerade, so sind zwei bestimmt durch das Verhältniss $\frac{\sin ac}{\sin cb} = \lambda$, vier durch das Doppelverhältniss: $\frac{\sin ab}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin dc} = \frac{\sin ab \sin cd}{\sin bc \sin da}$.

§ 6. Das Doppelverhältniss von vier Punkten A, B, C, D in einer geraden Linie ist gleich dem Doppelverhältniss der vier Geraden a, b, c, d, welche von diesen Punkten aus nach einem beliebigen Punkte O gehen.

$$\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \frac{OAB \cdot OCD}{OBC \cdot ODA} = \frac{OA \cdot OC \sin ab \cdot OC \cdot OD \sin cd}{OA \cdot OC \sin bc \cdot OD \cdot OA \sin da} = \frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin bc \cdot \sin da}.$$

§ 7. Liegen auf einer Geraden g vier Punkte A, B, C, D, und auf einer zweiten g_1 die Punkte A', B', C', D', ist das Doppelverhältniss beider Punktreihen gleich und fällt der Punkt A mit A' zusammen, so gehen die Verbindungslinien BB', CC', DD' durch einen Punkt O. Denn zieht man die Linien $BB' = b$, $CC'_1 = c$ und verbindet den Schnittpunkt O mit A (A') und mit D, die Linie OD schneide die Gerade g_1 in D^0, so ist: $\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot DA} = \frac{\sin ab \sin cd}{\sin bc \sin da} = \frac{A'B' \cdot C'D'}{B'C' \cdot D'A'} = \frac{A'B' \cdot C'D^0}{B'C' \cdot D^0A'}$. Folglich muss D^0 mit D' zusammenfallen.

§ 8. Collineare Punktreihen nennt man auf zwei Geraden gelegene Punktreihen, wenn das Doppelverhältniss zwischen irgend vier Punkten der ersten gleich dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Punkte der zweiten Reihe ist. Entspricht jedem Punkte einer Reihe unzweideutig ein bestimmter Punkt der zweiten, so sind die Reihen collinear. Sind nämlich A und A' zwei feste entsprechende Punkte zweier Reihen, so lässt sich zu einem Punkte C der einen der entsprechende C' der zweiten eindeutig, d. h. durch eine Gleichung ersten Grades von folgender Form finden: $AC \cdot A'C' + \lambda AC + \mu A'C' = 0$. Ein von AC oder A'C' freies Glied darf nicht vorkommen, weil für $AC = 0$ auch $A'C' = 0$ werden muss. Sind B und B' ein zweites Paar entsprechender Punkte, so ist $AC = AB + BC$, $A'C' = A'B' + B'C'$. (1) Eingesetzt in obige Gleichung:

$$BC \cdot B'C' + (\lambda + A'B')BC + (\mu + AB)B'C' + AB \cdot A'B' + \lambda AB + \mu A'B' = 0.$$

in Folge (1) also:
$$BC \cdot B'C' + (\lambda + A'B')BC + (\mu + AB)B'C' = 0. \quad (2)$$

Daraus folgt
$$BC = -\frac{(\mu + AB)B'C'}{B'C' + \lambda + A'B'} = -\frac{(\mu + AB)B'C'}{\lambda + A'C'}.$$

Aus (1) folgt $AC = -\frac{\mu A'C'}{\lambda + A'C'}$. Mithin $\frac{AC}{BC} = \frac{\mu}{\mu + AB} \cdot \frac{A'C'}{B'C'}$. (3) Da der Faktor $\frac{\mu}{\mu + AB}$ unabhängig von der Lage der Punkte C und C' ist, so hat auch für ein Paar anderer entsprechender Punkte D und D' die Relation Gültigkeit: $\frac{AD}{BD} = \frac{\mu}{\mu + AB} \cdot \frac{A'D'}{B'D'}$. (4) Durch Division von (3) und (4) ergiebt sich $\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'}$.

Aus § 7 und § 8 folgt sofort, dass, wenn von zwei collinearen Punktreihen zwei entsprechende Punkte auf einander fallen, dann die Verbindungslinien sämmtlicher entsprechenden Punktpaare durch einen Punkt O gehen.

Kehren wir nun zu dem speciellen dioptrischen Problem zurück. Q sei die brechende Fläche, i der Incidenzpunkt, K der Krümmungsmittelpunkt, $n : n_1$ der Brechungsindex, r der Radius, S der einfallende Strahl, S_1 der gebrochene. Jeder ist als unendlich dünnes Bündel zu denken. Dann ist klar, dass jeder Lage des Leuchtpunktes auf S ein ganz bestimmter Bildpunkt auf S_1 entspricht (rücksichtlich der Brechung im Meridian der Einfallsebene). Wir haben also zwei auf den Geraden S und S_1 gelegene kollinare Punktreihen vor uns, und da beide den Punkt i entsprechend gemeinsam haben, so müssen die Verbindungslinien aller Paare von entsprechenden Punkten durch einen Punkt O, das perspectivische Centrum, gehen. Zur Bestimmung desselben haben wir auf dem einfallenden Strahl noch zwei Punkte zu ermitteln, welche zwei anderen auf dem gebrochenen entsprechen.

Wir ziehen durch K eine Gerade. Dieselbe schneide S in m, und zwar unter einem Winkel $= \omega_1$, S_1 in m_1. Dann ist der Winkel $i m_1 K = \omega$, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $i K m_1$ und $i K m$ hervorgeht. $Km : Ki = \sin\omega : \sin\omega_1 = n_1 : n$ $\quad Km_1 : Ki = \sin\omega_1 : \sin\omega = n : n_1$ also $Km = r n_1 : n$; $Km_1 = r n : n_1$ und $Km : Km_1 = n_1 : n = \sin\omega : \sin\omega_1$.

Ziehen wir einen beliebigen anderen Strahl $T i_1 m$ und verbinden i_1 mit m_1,[1]) so ist $i_1 m_1$ der gebrochene Strahl. Die Dreiecke $K i_1 m$ und $K i_1 m_1$ sind ähnlich, weil der Winkel bei K beiden gemeinsam und $Km : Ki_1 = n_1 : n$ und $Km_1 : Ki_1 = n : n_1$. Folglich verhält sich auch $\sin K i_1 m : \sin K i_1 m_1 = Km : Km_1 = n_1 : n$. Folglich: wenn die einfallenden Strahlen nach m convergiren, vereinigen sich die gebrochenen in m_1, beide sind somit entsprechende Punkte. Man beschreibt um K zwei concentrische Kreise, so dass sich die Radien verhalten $= n_1 : n$, verlängert den einfallenden Strahl bis zu der Peripherie des einen Kreises, verbindet den Schnittpunkt m mit K, der Durchschnittspunkt m_1 mit dem zweiten Kreise ist der entsprechende Punkt von m. Der eine Kreis ist das virtuelle Bild des anderen.

[1]) In der Fig. 13 ist diese Linie irrthümlicher Weise nicht durch m_1 geführt.

Das zweite Paar entsprechender Punkte findet man auf folgendem Wege: Man beschreibt über i K als Durchmesser einen Hülfskreis, welcher den einfallenden Strahl in p, den gebrochenen in p_1 trifft. Zieht man nur unendlich nahe an i in der Einfallsebene eintretende Strahlen in Betracht, so kann man die Eintrittspunkte als auf der Peripherie des Hülfskreises liegend ansehen. Alle nach p convergirenden Strahlen haben dann gleiche Einfallswinkel mit dem Loth, müssen daher auch gleiche Brechungswinkel haben und, da $Kp : Kp_1 = \sin\omega : \sin\omega_1$, alle nach p_1 convergiren. Es sind somit p und p_1 entsprechende Punkte. Der Schnittpunkt von $m m_1 K$ und $p p_1$ muss das perspectivische Centrum sein für die, auf den in der Einfallsebene verlaufenden Strahlen, gelegenen Reihen von Leucht- und ihnen entsprechenden Bildpunkten. Wir verbinden A mit O und verlängern bis zum Schnittpunkt B mit S_1, dann ist B der entsprechende Punkt von A und der Ort der stehenden Brennlinie. Die Construction vereinfacht sich noch durch folgende Betrachtung. Winkel $K p p_1 = \sphericalangle K i p_1 = \sphericalangle i m K$, also $\triangle K p m \sim \triangle K O p$ und $\sphericalangle p O m = \sphericalangle K p m = \sphericalangle K p i = 90^0$. Man hat daher, um den Punkt O zu finden, nur von K ein Loth auf $p p_1$ zu fällen. Zur Entwicklung der Formel fällen wir noch die Perpendikel $B\lambda_1$, $A\lambda$ und i P. Dann haben wir in den ähnlichen Dreiecken $O B \lambda_1$ und $O A \lambda$

$$O\lambda_1 : B\lambda_1 = O\lambda : A\lambda; \qquad \frac{B p_1 \sin\omega - O p_1}{B p_1 \cos\omega} = \frac{A p \sin\omega_1 + O p}{A p \cos\omega_1}.$$

Da $Op_1 = Pp$ und $Op = Pp_1$:

$$\operatorname{tg}\omega - \frac{i p \sin\omega_1}{B p_1 \cos\omega} = \operatorname{tg}\omega_1 + \frac{i p_1 \sin\omega}{A p \cos\omega_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\omega - \frac{r \sin\omega_1}{B p_1} = \operatorname{tg}\omega_1 + \frac{r \sin\omega}{A p}$$

$$- \operatorname{tg}\omega_1 - \frac{r \sin\omega_1}{B p_1} = - \operatorname{tg}\omega + \frac{r \sin\omega}{A p}; \qquad \frac{B p_1 \sin\omega_1 + r \sin\omega_1 \cos\omega_1}{B p_1 \cos\omega_1} = \frac{A p \sin\omega - r \sin\omega \cos\omega}{A p \cos\omega}$$

$$\frac{(f - r\cos\omega_1)\sin\omega_1 + r \sin\omega_1 \cos\omega_1}{(f - r\cos\omega_1)\cos\omega_1} = \frac{(e + r\cos\omega)\sin\omega - r\sin\omega\cos\omega}{(e + r\cos\omega)\cos\omega}; \qquad \frac{f \operatorname{tg}\omega_1}{f - r\cos\omega_1} = \frac{e \operatorname{tg}\omega}{e + r\cos\omega}$$

Durch leichte Umgestaltung erhält man hieraus: $f_1 = \dfrac{r \sin\omega \cos^2\omega_1}{\sin(\omega - \omega_1) - \dfrac{r \sin\omega_1 \cos^2\omega}{e}}$. Dividirt man Zähler und Nenner durch $\sin\omega_1$

$$f_1 = \frac{r \dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1} \cos^2\omega_1}{\dfrac{\sin\omega\cos\omega_1 - \cos\omega\sin\omega_1}{\sin\omega_1} - \dfrac{r}{e}\cos^2\omega}$$

und setzt $\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = n$, so wird $f_1 = \dfrac{r n \cos^2\omega_1}{n\cos\omega_1 - \cos\omega - \dfrac{r}{e}\cos^2\omega}$. Rückt der Leuchtpunkt in unendliche Entfernung, so nehmen die beiden Formeln:

$$f_2 = \frac{r\sin\omega}{\sin(\omega - \omega_1) - \dfrac{r}{e}\sin\omega_1} \qquad f_1 = \frac{r\sin\omega\cos^2\omega_1}{\sin(\omega - \omega_1) - \dfrac{r}{e}\sin\omega_1\cos^2\omega}$$

folgende Gestalt an:

$$F_1 = \frac{r\sin\omega}{\sin(\omega - \omega_1)} \qquad \Phi_1 = \frac{r\sin\omega\cos^2\omega_1}{\sin(\omega - \omega_1)} = F_1\cos^2\omega_1.$$

Für die Strahlen, welche in dem in i zur Ebene des Papiers senkrechten Meridian einfallen, ist K das projectivische Centrum. Jede durch K gezogene Gerade schneidet den einfallenden und den gebrochenen Strahl in zwei einander zugeordneten Punkten. Liegt der Leuchtpunkt im Unendlichen, so haben wir durch K (Fig. 14) die Gerade $K F_1$ parallel zum Strahl A i zu ziehen und erhalten den Hauptbrennpunkt F_1 (für die in dem erwähnten Meridian einfallenden Strahlen).

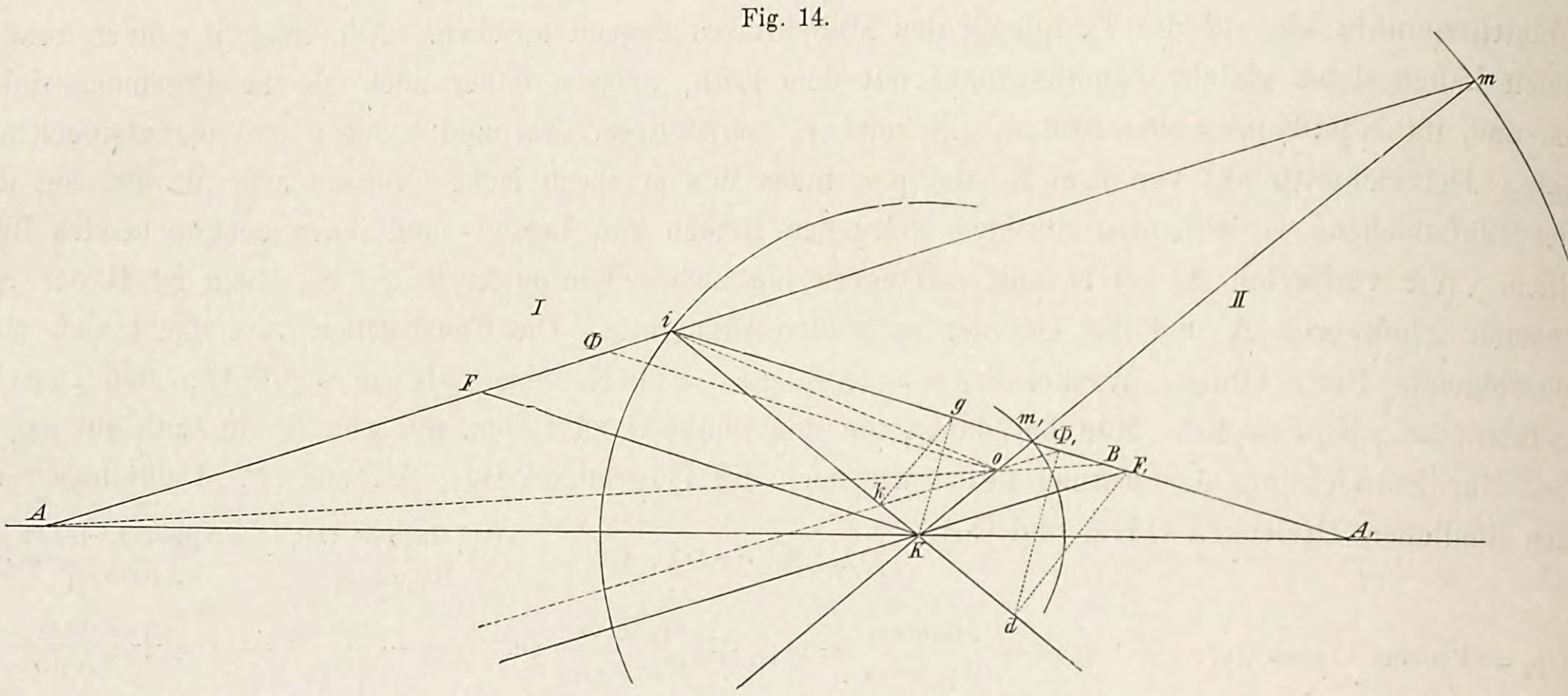
Für die im Meridian der Einfallsebene verlaufenden Strahlen ist O das perspectivische Centrum. Es behält dieselbe Lage, solange einfallender und gebrochener Strahl dieselben sind; von der Entfernung des Leuchtpunktes von i ist der Ort dieses Centrums nicht abhängig. Jede durch O gezogene Gerade trifft die beiden Strahlen in zwei zugeordneten Punkten. Rückt der Leuchtpunkt ins Unendliche, so ist durch O die Linie $O\Phi_1$ parallel zu A i zu ziehen, Φ_1 ist der zugeordnete Punkt. Fällen wir von F_1 den Perpendikel $F_1 d$ und ziehen $d\Phi_1$, fällen wir weiter den Perpendikel K g und verbinden g mit k, so steht $d\Phi_1$ senkrecht zu $i A_1$ und g k senkrecht zu i K, weil $\Phi_1 = F_1 \cos^2\omega_1$ und $\Phi_1 : F_1 = r\cos^2\omega_1 : r$.

Fassen wir einen in umgekehrter Richtung vom zweiten ins erste Medium verlaufenden Strahl ins Auge, so ergeben sich dafür die beiden Brennweiten:

$$F = \frac{r\sin\omega_1}{\sin(\omega - \omega_1)} \ (\text{und } F_1 = nF) \ \text{und} \ \Phi = \frac{r\sin\omega_1\cos^2\omega}{\sin(\omega - \omega_1)} = F\cos^2\omega_1 \ \left(\text{und } \Phi_1 = n\Phi\,\frac{\cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}.\right)$$

Betrachtet man i als den Anfangspunkt eines schiefwinkligen Coordinatensystems mit den Axen i A und i A_1, so sind F und F_1, beziehendlich Φ und Φ_1, die Coordinaten der Punkte K und O. Zieht man

Fig. 14.



durch diese Punkte beliebige Gerade, z. B. A A_1, so besteht für die Coordinaten der Schnittpunkte immer folgende Beziehung: i A_1 : i A = F K : F A oder $a_1 : a = F_1 : a - F$ oder $\frac{F}{a} + \frac{F_1}{a_1} = 1$. Ebenso erhalten wir $\frac{\Phi}{b} + \frac{\Phi_1}{b_1} = 1$. Verbindet man K mit O und verlängert bis zu den Schnittpunkten mit den Strahlen m und m_1, so sind diese beiden Punkten zugeordnete Punkte, und zwar für beide Meridiane, da in der Verbindungslinie die beiden perspectivischen Centren liegen. Befindet sich in m ein Leuchtpunkt, so ist m_1 ein homocentrisches Bild desselben. Für diese beiden Punkte verschwindet die Aberration. Zu bemerken ist, dass m und m_1 immer auf derselben Seite des Centrums liegen müssen.

Trigonometrische Ableitung.

$$f_1 = AG \frac{\sin(\psi_1 + \alpha)}{\sin(\psi_1 + \alpha - \psi)}; \quad CG = r \frac{\sin \psi_1}{\sin(\psi_1 + \alpha)}; \quad AG = r - CG; \; f_1 = r \frac{\sin(\psi_1 + \alpha) - \sin \psi_1}{\sin[(\psi_1 + \alpha) - \psi]}$$

$$e = AH \frac{\sin(\varphi_1 + \alpha)}{\sin(\varphi - \varphi_1 - \alpha)}; \quad HC = \frac{r \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \alpha)}; \quad AH = r - HC; \; e = \frac{r \sin(\varphi_1 + \alpha) - \sin \varphi_1}{\sin[\varphi - (\varphi_1 + \alpha)]}.$$

Setzt man $\sin \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha = 1$, weil α sehr klein ist:

$$f_1 = \frac{r \alpha \cos \psi_1}{\cos \psi (\sin \psi_1 + \alpha \cos \psi_1) - \sin \psi (\cos \psi_1 - \alpha \sin \psi_1)} \qquad e = \frac{r \alpha \cos \varphi_1}{\sin \varphi (\cos \varphi_1 - \alpha \sin \varphi_1) - \cos \varphi (\sin \varphi_1 + \alpha \cos \varphi_1)}.$$

Löst man beide Gleichungen nach ψ_1 und φ_1 auf und setzt $\alpha^2 = 0$, so folgt:

$$\sin^2 \psi_1 = \sin \psi \frac{f_1 \sin \psi + 2 \alpha (r - f_1 \cos \psi)}{f_1 + 2 r \alpha \sin \psi} \qquad \sin^2 \varphi_1 = \sin \varphi \frac{e \sin \varphi - 2 \alpha (e \cos \varphi + r)}{e - 2 r \alpha \sin \varphi}.$$

Es ist $n^2 \sin^2 \psi_1 = \sin^2 \varphi_1$; multiplicirt man die Gleichung links mit n^2 und setzt dann beide gleich, so erhält man

$$f_1 = \frac{n e r \cos^2 \psi}{n e \cos \psi + n r \sin \varphi \sin \psi - r - e \cos \varphi} = \frac{n \cos^2 \psi}{n \cos \psi - \cos \varphi - \frac{r}{e} \cos^2 \varphi}$$

$$r = f_2 \frac{\sin(\vartheta - \psi)}{\sin \vartheta} = f_2 (\cos \psi - \operatorname{cotg} \vartheta \sin \psi) \qquad r = e \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{\sin \vartheta} = e (\operatorname{cotg} \vartheta \sin \varphi - \cos \varphi)$$

$$\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{f_2 \cos \varphi - r}{f_2 \sin \psi} \qquad \operatorname{cotg} \vartheta = \frac{r + e \cos \varphi}{e \sin \varphi}.$$

Beide Werthe gleichgesetzt:

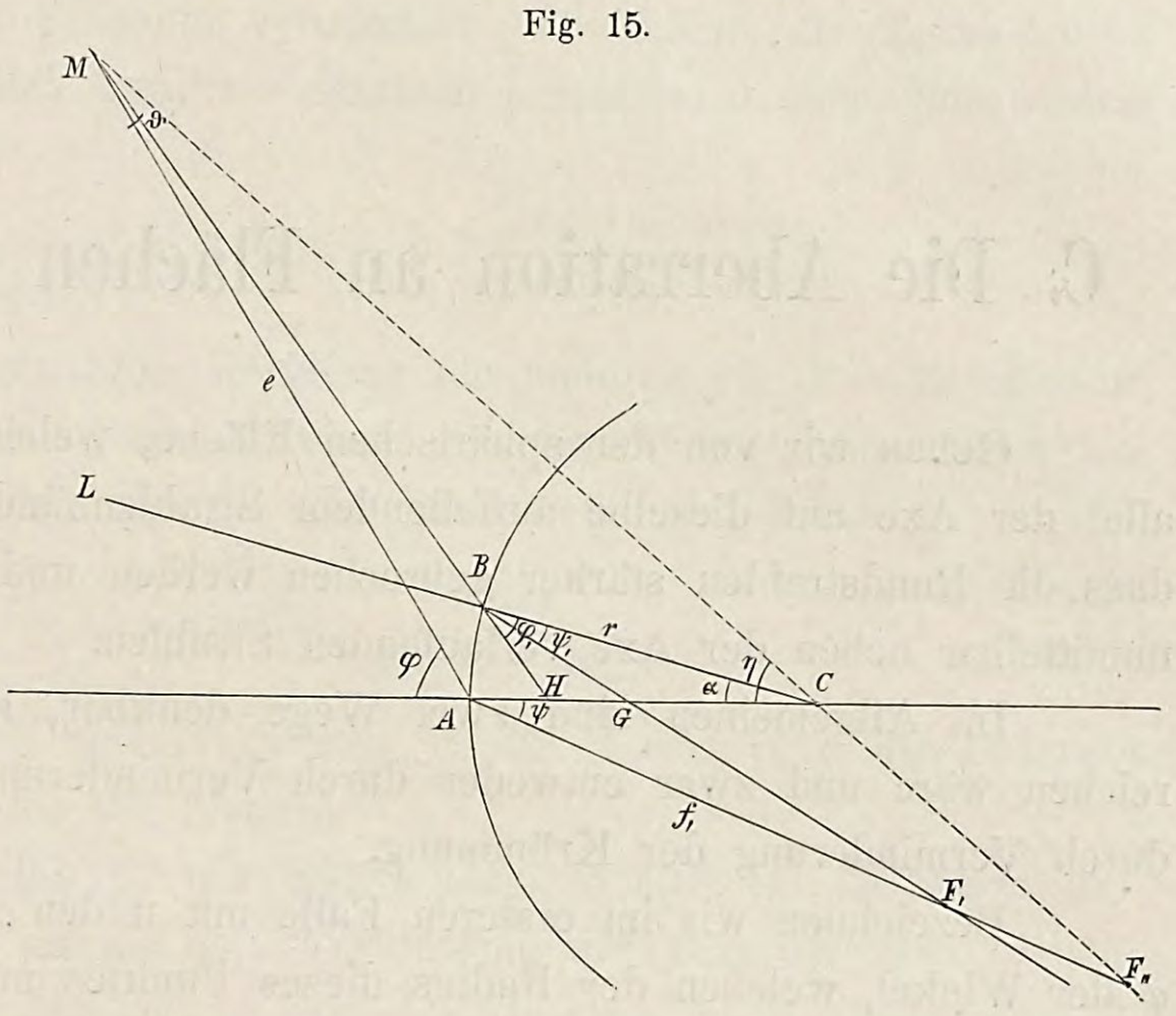
$$f_2 = \frac{e r \sin \varphi}{e \sin \varphi \cos \psi - r \sin \psi - e \sin \psi \cos \varphi} = \frac{n r}{n \cos \psi - \cos \varphi - \frac{r}{e}}.$$

Setzt man für n den Werth $\sin\varphi : \sin\psi$ ein, so nehmen die Formeln folgende Gestalt an:

$$f_1 = \frac{r \sin\varphi \cos^2\psi}{\sin(\varphi - \psi) - \frac{r}{e}\sin\psi\cos^2\varphi}$$

$$f_2 = \frac{r \sin\varphi}{\sin(\varphi - \psi) - \frac{r}{e}\sin\psi}.$$

Fig. 15.



Daraus fällt für parallele Strahlen an der Vorderfläche das mit e behaftete Glied fort.

An der Hinterfläche ist zu setzen für $e = f_1 - \delta$ oder $f - \delta$, ausserdem $n = \frac{1}{n}$, $r = -\varrho$:

$$v_1 = \frac{\varrho\cos^2\vartheta}{\frac{\varrho n}{e}\cos^2\eta + (n\cos\eta - \cos\vartheta)}$$

$$= \frac{\varrho\sin\eta\cos^2\vartheta}{\frac{\varrho\sin\vartheta\cos^2\eta}{e} - \sin(\eta - \vartheta)}$$

$$v_2 = \frac{\varrho}{\frac{\varrho n}{e} + (n\cos\eta - \cos\vartheta)} = \frac{\varrho\sin\eta}{\frac{\varrho\sin\vartheta}{e} - \sin(\eta - \vartheta)}.$$

Für die Radialstrahlen vereinfacht sich die Formel an der Hinterfläche, da die Brechung homocentrisch ist: $p = \frac{\varrho}{\frac{n\varrho}{e} + n - 1}$.

Die Rechnung bleibt übersichtlicher, wenn man die Formel für Vorder- und Hinterfläche getrennt lässt; doch kann man dieselben auch combiniren. Setzt man in die Gleichungen für die Hinterfläche ein $-(f_1 - \delta)$ oder $-(f_2 - \delta)$ und $n\cos\psi - \cos\varphi = \zeta$, so erhält man für die Centralstrahlen:

$$p_1 = \frac{\varrho\cos^2\varphi\left[n\,r\cos^2\psi - \delta\left(\zeta - \frac{r}{e}\cos^2\varphi\right)\right]}{n(r+\varrho)\zeta\cos^2\psi - \delta\zeta^2 - \frac{r}{e}\cos^2\varphi\,(n\varrho\cos^2\psi - \delta\zeta)} \qquad p_2 = \frac{\varrho\left[n\,r - \delta\left(\zeta - \frac{r}{e}\right)\right]}{n(r+\varrho)\zeta - \delta\zeta^2 - \frac{r}{e}(n\varrho - \delta\zeta)}.$$

Sind die auf die Vorderfläche auffallenden Strahlen parallel: $P_1 = \frac{\varrho}{\zeta}\cos^2\varphi \cdot \frac{n\,r\cos^2\psi - \delta\zeta}{n(r+\varrho)\cos^2\psi - \delta\zeta}$; $P_2 = \frac{\varrho}{\zeta} \cdot \frac{n\,r - \delta\zeta}{n(r+\varrho) - \delta\zeta}$.

Die Länge der Brennstrecke erhält man, wenn man P_1 von P_2 abzieht.

Setzt man $r = \infty$, so wird $P_2 - P_1 = \varrho\frac{\sin^2\varphi}{\zeta}$, für $\varrho = \infty$ dagegen $P_2 - P_1 = r\frac{\sin^2\varphi}{\zeta} - \delta\frac{n^2 - 1}{n}\operatorname{tg}^2\psi$. Da $n^2 > 1$, so ist der letzte Werth für $P_2 - P_1$ kleiner. Hieraus folgt, dass für Centralstrahlen die Brennstrecke länger ist, wenn eine Planconvexlinse dem Licht die flache Seite zukehrt, als wenn die convexe Seite demselben zugewandt ist. Derselbe Unterschied muss sich natürlich auch bei asymmetrischen Biconvexlinsen geltend machen.

Um die combinirte Formel für die Radialstrahlen unter der Voraussetzung, dass parallele Strahlen auf die Vorderfläche fallen, zu erhalten, setzt man in die Formel $p = \frac{\varrho}{\frac{n\varrho}{e} + n - 1}$ den Werth für e ein:

$$e_1 = \frac{n\,r\cos^2\psi}{n\cos\psi - \cos\varphi} - \varrho - \frac{(r + \varrho - d)\sin(\lambda - \varphi)}{\sin\psi}$$

und setzt $n\cos\psi - \cos\varphi = \zeta$, $(r + \varrho - d)\sin\frac{\lambda - \varphi}{\sin\psi} = \chi$. Es wird $e_1 = \frac{n\,r\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)}{\zeta}$. Also

$$p_1 = \varrho\,\frac{n\,r\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)}{n\varrho\zeta + (n-1)[n\,r\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)]}.$$

p_2 findet man, wenn man den Werth für e_2 statt e_1 setzt. Es ist aber $e_2 = e_1\cos^2\psi$. Die Formel für p_2 unterscheidet sich von der für p_1 nur dadurch, dass $\cos^2\psi$ da, wo es vorkommt, ausfällt.

$$p_2 = \varrho\,\frac{n\,r - \zeta(\varrho + \chi)}{n\varrho\zeta + (n-1)[n\,r - \zeta(\varrho + \chi)]}$$

Die Länge der Brennstrecke ist:

$$p_2 - p_1 = \varrho\left[\frac{n\,r - \zeta(\varrho + \chi)}{n\varrho\zeta + (n-1)[n\,r - \zeta(\varrho + \chi)]} - \frac{n\,r\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)}{n\varrho\zeta + (n-1)[n\,r\cos^2\psi - \zeta(\varrho + \chi)]}\right].$$

Setzt man den Radius der Vorderfläche $r = \infty$, so ergiebt sich $p_2 - p_1 = 0$ (vergl. Seite 19).

C. Die Aberration an Flächen mit abnehmender Krümmung.

Gehen wir von der sphärischen Fläche, welche zwei verschiedene Medien trennt, und einem parallel der Axe auf dieselbe auffallendem Strahlenbündel aus, so besteht die sphärische Aberration darin, dass die Randstrahlen stärker gebrochen werden und die Axe schon näher der Fläche schneiden als die unmittelbar neben der Axe verlaufenden Strahlen.

Im Allgemeinen sind zwei Wege denkbar, auf welchen eine Correction der Abweichung zu erreichen wäre und zwar entweder durch Verminderung des Brechungsindex nach der Peripherie zu, oder durch Verminderung der Krümmung.

Bezeichnen wir im ersteren Falle mit n den Index an einem beliebigen Punkte der Fläche; es sei φ der Winkel, welchen der Radius dieses Punktes mit der Axe bildet, und m sei der Index am Scheitel; dann finden wir

$$n^2 = m^2 - 4\,(m - 1)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Es würde nothwendig sein, dass die Dichtigkeit in Schichten längs den vom Hauptbrennpunkt gegen die Fläche gezogenen Radien-Vektoren abnähme, was bei einer einzelnen Fläche physikalisch undenkbar ist. Dagegen ist diese Correctionsweise bei Linsen wohl möglich und hat sie die Natur wirklich in Benutzung gezogen, indem sie in der Krystalllinse auf einen stark brechenden Kern Schichten von geringerer Brechkraft folgen liess. Die Randstrahlen passiren nur die schwächer brechenden Schichten.

Für einzelne brechende Flächen bleibt die andere Correctionsweise übrig, nämlich die Verminderung der Krümmung gegen die Peripherie hin. Eine solche findet z. B. statt bei der Ellipse und der Hyperbel. Schon Cartesius,[1]) Gregor, Keppler[2]) kannten die optischen Eigenschaften des Rotations-Ellipsoids und Hyperboloids darin bestehend, dass diese Flächen unter einer gewissen Bedingung parallele Strahlen homocentrisch in einem Brennpunkte vereinigen.

14. Fläche eines Rotations-Ellipsoids.

Wie in Bezug schräger Strahlenbündel das Interesse der physiologischen Dioptrik von demjenigen der Optik überhaupt abwich, so ist dies auch der Fall hinsichtlich der nichtsphärischen Rotationsflächen, die in der praktischen Optik nur wenig Anwendung gefunden haben, für die physiologische dagegen von grosser Bedeutung sind, weil die Krümmung der menschlichen Hornhaut der ellipsoidischen sich nähert.

Die Massverhältnisse des Rotations-Ellipsoids, welches der Hornhautoberfläche am besten entspricht, sind die folgenden: $a = 11\cdot009$, $b = 9\cdot272$, $e = 5\cdot935$, $p = 7\cdot809$, $n = 1\cdot338$.

Es möge vorläufig unbeachtet bleiben, dass die Annahme eines dreiaxigen Ellipsoids den thatsächlichen Verhältnissen besser gerecht wird, als diejenige eines Rotations-Ellipsoids. Die Fig. 1 Taf. II zeigt eine Ellipse von obigen Massen in fünfmaliger Vergrösserung. Die Lage der Caustiken ist für ein auf den flacheren Scheitel B und ein zweites auf den gekrümmteren A auffallendes Bündel berechnet. Die Bezeichnung ist dieselbe wie bei der kugeligen Fläche. Am Scheitel A ist die Brechung für ein dünnes paraxiales Bündel eine homocentrische, da derselbe in beiden Meridianen gleiche Krümmung besitzt. Vom

[1]) Cartesius, Specimina philosophiae. Dioptrices. Amsterdam 1685. Vol. I. S. 109.

[2]) Keppler, Opera omnia. Frankfurt u. Erlangen 1859. Paralipomena in Vitellionem IV 5. S. 188 u. V 3. S. 254.

gemeinsamen Hauptbrennpunkt beider Meridiane F aus verläuft die äussere Caustica durch $b_1 b_2 b_3 b_4$; die innere fällt auch hier mit dem Axenstrahl zusammen, da es sich um eine Rotationsfläche handelt. Die Aberration sowohl wie die Astigmasie erscheint beim Ellipsoid vermindert. Die Länge der Brennstrecke ist an sphärischen Flächen für schief einfallende Bündel paralleler Strahlen proportional dem Sinusquadrat des Brechungswinkels.

$$p_2 = \frac{r \sin \omega}{\sin(\omega - \omega_1)} \qquad p_1 = \frac{r \sin \omega}{\sin(\omega - \omega_1)} \cos^2 \omega_1 \qquad p_2 - p_1 = \frac{r \sin \omega \sin^2 \omega_1}{\sin(\omega - \omega_1)}.$$

Beim Ellipsoid ist aber der Krümmungsradius des vertikalen Meridians ein anderer als der des horizontalen. Der Krümmungsradius des vertikalen Meridians ist die Normale, das Stück des jedesmaligen Radius zwischen Circumferenz und Axe, so dass die Formel der zweiten Brennweite hier wird

$$p_2 = \frac{N \sin \omega}{\sin(\omega - \omega_1)} \quad \text{und} \quad p_2 - p_1 = (N - r \cos^2 \omega_1) \frac{\sin \omega}{\sin(\omega - \omega_1)}.$$

Je weiter wir vom gekrümmteren zum flacheren Scheitel rücken, desto grösser wird die Differenz zwischen r und N, indem der Radius stärker wächst als die Normale.

Bei der Ellipse wird somit die Verkürzung von p_1 mit wachsendem Winkel ω_1 theilweise aufgehoben durch die Vergrösserung von r. Es resultirt daraus eine Verkürzung der Brennstrecken.

Soll die Astigmasie ganz beseitigt werden, so muss $p_1 = p_2$ werden oder $N = r \cos^2 \omega_1$. Dies ist der Fall für Strahlen, die nach der Brechung durch einen Brennpunkt der Ellipse gehen. Die Strahlen werden in der erforderlichen Weise gebrochen, wenn der Index $= a : e$ ist. Da beim Hornhaut-Ellipsoid derselbe diesen Werth nicht erreicht, so ist die Astigmasie nicht vollständig corrigirt.

Wir wenden uns jetzt zum flacheren Scheitel D. Der Axenstrahl erleidet eine stark astigmatische Brechung. Bisher liessen die Bezeichnungen als erste und zweite Brennlinien keine Missdeutung zu, was im Folgenden möglich sein würde; ich nenne daher von jetzt an die Brennlinien in Beziehung zur Einfallsebene, und zwar die ersten die „stehenden“ (NB. senkrecht zur Einfallsebene), die zweiten die „liegenden“, da sie in der Einfallsebene sich befinden. Die stehenden entsprechen der Brechung im Meridian der Einfallsebene, die liegenden derjenigen in dem dazu vertikalen Meridian.

Am flacheren Scheitel D ist der vertikale Meridian viel stärker gekrümmt als der horizontale. Dem entsprechend befindet sich die liegende Brennlinie näher, bei a_0, die stehende ferner, bei b_0 90°. Die Aberrationsverhältnisse sind hier viel ungünstiger als bei der Kugel, da die Krümmung der Fläche von D nach der Peripherie hin zunimmt. Am gekrümmteren Scheitel war die brechende Fläche diejenige eines Rotations-Ellipsoids, was für den flacheren bezüglich der kurzen Axe nicht mehr zutrifft. Die innere Caustica deckt daher nicht den Axenstrahl, sondern verläuft als Curve von a_0 durch $a_1 a_2 a_3 a_4$. Die äussere Caustica ist $b_0 b_1 b_2 b_3 b_4$. Beide Curven berühren sich in einem Punkte. Am Strahle 11 befindet sich die liegende vor der stehenden Brennlinie, am Strahle 8 wieder die stehende vor der liegenden. Zwischen beiden muss also ein Strahl verlaufen, an welchem beide Brennlinien auf einander fallen, also homocentrische Brechung stattfindet. Soll $p_1 = p_2$ werden, so muss $N = r \cos^2 \omega_1$ sein. Dies trifft zu für die nach der Brechung durch die Brennpunkte der Ellipse gehenden Strahlen. Der Strahl 10 tangirt die beiden Caustiken in ihrem Berührungspunkte. Hier liegt auch sein homocentrischer Brennpunkt $a_2 b_2$. Auf der anderen Seite des Axenstrahles D b_0 — 90° wiederholt sich dieselbe Brennfigur.

Das centrale Sehen mit D als Hornhautscheitel entspricht demjenigen stark Astigmatischer. Im Gegensatz zur Kugel haben wir zwei stigmatisch gebrochene Strahlen, die aber getrennt zu beiden Seiten des Axenstrahles verlaufen; dieser selbst zeigt hochgradige Astigmasie.

Die Nebenfigur 2 giebt schematisch die Brennfigur des flachen Scheitels wieder. Das senkrecht zur Ebene des Papiers stehende Band $i_3 i_3$; $b_2 a_2$; $b_0 b$ ist die Caustica externa, der Ort der ersten oder stehenden Brennlinien, die Evolute, an welcher die Strahlen des 90°-Bündels: 3, 8, 10, 11, 12 Tangenten sind. Die in der Ebene des Papiers liegende Curve $a_4 a_3 a_2 a_0$ ist die Caustica interna. Verfolgt man die

Strahlen der obigen Aufzählung nach, so muss man die Brennstrecke $i_3 i_3 — a_4 a_3$ in der Weise sich bewegen lassen, dass $i_3 i_3$ etwas schneller entlang der bandförmigen Caustica externa, $a_4 a_3$ langsamer längs der Caustica interna fortgleitet. Dabei verkürzt sich die Brennstrecke immer mehr, bis sie in $b_2 a_2$ zum Punkte wird. Jenseits dieses Punktes befindet sich nun die zweite liegende Brennlinie vor der ersten stehenden, was der den Abschluss bildende Strahl 12 mit seiner liegenden Brennlinie a_0 und der senkrecht zum Papier stehenden $b_0 b$ zur Anschauung bringt.

Die Aberrationsfiguren von unter 70° und 46° 30′ mit der Axe einfallenden Strahlenbündeln zeigen den allmählichen Uebergang der Figur des flachen in die des gekrümmten Scheitels. Bei dem Bündel 70° ist 11 der Normalstrahl, bei dem Bündel 46° 30 ist es N. 9. Die homocentrischen Strahlen sind 7 und 5, welche durch den Brennpunkt der Ellipse gehen und die Caustiken in ihrem Berührungspunkte tangiren. Auf der anderen Seite des Normalstrahles befinden sich analoge, aber nicht symmetrische Brennfiguren.

In der Abbildung ist die Lage der Linse im menschlichen Auge, die Durchschnittsweite der Pupille (4 mm) und die Erweiterung derselben bis auf 6 mm angegeben. Man sieht, dass die auf der anderen Seite der Normalstrahlen verlaufenden Strahlen durchaus keine Bedeutung für das menschliche Auge haben. Die Mitte des benutzbaren Strahlenkegels bildet jedesmal der im Scheitel der Linse auffallende Strahl. Die homocentrischen Strahlen können für ein unter 90° mit der Axe einfallendes Bündel überhaupt nicht, für das 70°-Bündel nur bei weiter Pupille, für das 46° 30-Bündel dagegen auch bei mittlerer Pupille zur Verwendung kommen.

Einen Blick wollen wir auch auf diejenigen Strahlen werfen, welche nicht in unmittelbarer Nähe der Einfallsebene eintreten. Denken wir uns um A M (Taf. II Fig. 2) das durch die von 6 ausgehende Normale und Ordinate gebildete Dreieck um 45° gedreht, so dass also, wenn wir die neue Lage von 6 mit 6a bezeichnen, der Winkel 6 — Ordinatenfusspunkt — 6a = 45° ist. Es falle bei 6a ein Strahl des 70°-Bündels paralleler Strahlen auf. Dieser Strahl würde ungefähr der äusserste sein, welcher noch durch die Pupille am oberen Rande passirte. Der Krümmungsmittelpunkt hat folgende orthogonale Coordinaten vom Axenpunkte der Normalen aus: 0·4388 mm. Längsaxe nach hinten, 0·02709 tiefer, 0·169 quer nach links. Seine zweite Brennlinie hat das gebrochene Strahlenbündel in 18·52 mm Entfernung vom Krümmungsmittelpunkte. Sie liegt unter dem Theilpunkte des letzten und zweiten Drittels der Brennlinie $b_3 a_3$ (70)° und 0·027 mm tiefer; in der Zeichnung würde dies 1·3 Millimeter ausmachen. Die Einfallsebene schneidet die Ebene der Zeichnung in einer durch den Axenpunkt der Normale 6 zu 11—70° gezogenen Parallele, und der gesuchte Strahl geht durch einen 17·5 mm von diesem Axenpunkt entfernten Punkt. Es ist somit hier die innere Caustica keine scharfe Schneide, die in der Haupteinfallsebene liegt, wie in der Fig. 3 Taf. XI, sondern eine gebogene Fläche. Diese gebogene Fläche ist diejenige der $\varphi . \chi . \psi$ Fig. 11 S. 38 und der Figuren 1 und 2 auf Taf. XI. Jedoch sind die Abweichungen gering, so dass wir sie ohne Fehler von praktischer Bedeutung vernachlässigen können, besonders auch, weil das meiste Licht doch in oder nahe der Haupteinfallsebene durch die Pupille tritt.

Tabelle VIII.

Hornhaut-Ellipse.

a = 11·009 b = 9·272 e = 5·935 p = 7·809 n = 1·338

	y	x	r	N	s	γ	
Strahlenbündel	9·272	0	13·071	9·272	0	90°	(s = Subnormale.)
parallel der langen	8·511	4·368	12·18	9·057	3·098	70°	(γ = dem Winkel
Axe.	6·154	8·236	10·015	8·484	5·841	46° 30	zwischen der
	6	8·393	9·89	8·453	5·941	45° 17	Normale und
	4·12	9·863	8·775	8·12	6·992	30° 30	der langen Axe.)
	2·56	10·58	8·177	7·93	7·504		
	2·24	10·69	8·091	7·901	7·573	16° 30	
	1·08	10·93	7·835	7·831	7·754	7° 55	
	0	11·009	7·809	0		0	

Bündel paralleler Strahlen, die unter den folgenden Winkeln (mit der langen Axe) einfallen:

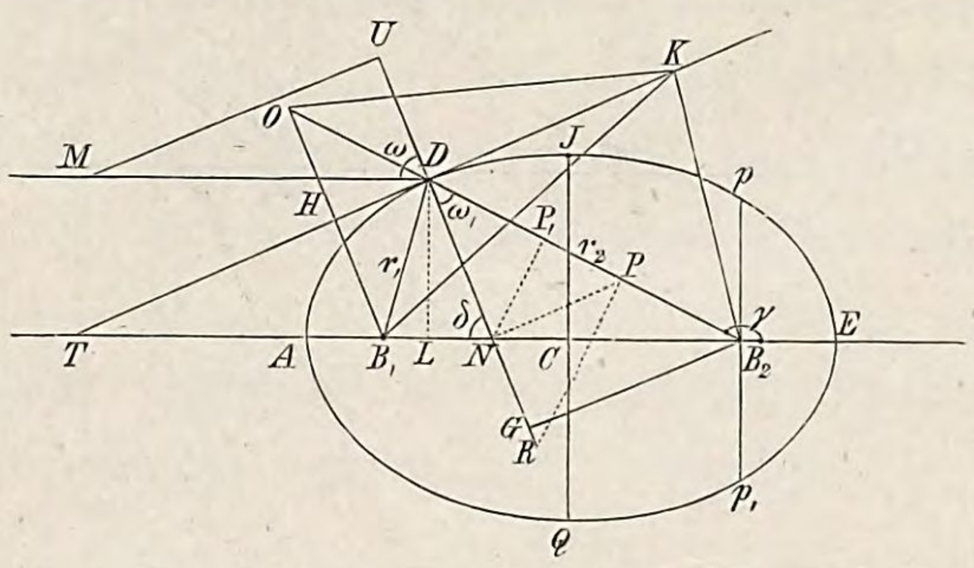
	y	α	β	P_2	P_1	Bst.	t[1])
90°	9·272	0	0	36·71	51·74	— 15·03	
	8·511	19° 59	14° 48	34·26	43·08	— 8·82	48·15
	6	44° 43	31° 44	26·47	22·41	+ 4·06	36·4
	2·24	73° 30	45° 46	16·28	8·112	+ 8·168	20·33
	(homocentrisch:	33°	24°	29·8		N = 8·55)	
70°	8·511	0	0	35·85	48·23	— 12·38	
	6	24° 43	18° 30	31·19	32·97	— 1·78	
	4·12	39° 30	28° 23	26·8	22·42	4·38	
	2·24	53° 30	36° 56	22·29	14·59	7·70	
	(homocentrisch:	27° 57	20° 30	30·31		N = 8·366)	
46° 30	6·154	0	0	33·58	39·65	— 6·07	
	4·12	16°	11° 53	31·22	32·31	— 1·09	
	2·56	27° 40	20° 18	28·73	26·06	+ 2·67	
	1·08	38° 35	27° 47	26·05	20·4	+ 5·65	
	(homocentrisch:	20° 51	16° 31	30·7		N = 8·0)	(t)[2])
0°	0	0	0	30·91	30·91	0	0
	2·24	16° 30	12° 15	30·28	29·61	+ 0·67	30·14
	4·12	30° 30	22° 18	28·9	26·73	+ 2·17	28·59
	6	45° 17	32° 5	26·31	22·09	+ 4·22	25·58
	8·511	70°	44° 37	19·85	13·53	+ 6·32	17·94

15. Die optischen Eigenschaften der Rotationskörper zweiten Grades.

Das Rotations-Ellipsoid.

Wir denken uns eine Ellipse entstanden, indem ein Faden von bestimmter Länge in zwei Punkten B_1 und B_2 befestigt und ein Stift D unter Straffspannung des Fadens von A nach D und ringsherum geführt wird. Die Summe der beiden Radienvectoren $B_1 D + B_2 D$ ist somit gleich einer Constanten (= 2 a). D sei ein Punkt der Ellipsenperipherie. Man verlängere $B_2 D$ um ein Stück $DO = DB_1$, ziehe OB_1 und senkrecht zu dieser Linie durch D die Linie TK. Da $OD = DB_1$ ist, so wird der Winkel ODB_1 durch die Linie TK halbirt. TK ist Tangente an der Ellipse.

Fig. 16.



Zum Beweise ist zu zeigen, dass die Ellipsenperipherie keinen zweiten Punkt mit der Linie TK gemeinsam haben kann.

Verbindet man einen beliebigen zweiten Punkt K der Linie mit O, B_1 und B_2, so ist $OK = B_1 K$ und $B_2 K + OK = B_2 K + B_1 K$. Läge K auf der Ellipsenperipherie, so müsste $B_2 K + B_1 K = B_2 D + B_1 D = B_2 O$ und auch $B_2 K + OK = B_2 O$ sein, was unmöglich ist.

Hieraus folgt: Winkel $ODT = \measuredangle TDB_1 = \measuredangle KDB_2$ und, wenn man DN senkrecht zu TK zieht, auch $\measuredangle B_1 DN = \measuredangle B_2 DN$.

Die Winkel, welche die Radienvectoren mit der Tangente bilden, sind einander gleich, und die Normale halbirt den Winkel zwischen beiden Radienvectoren.

Diese Sätze begründen die für das Rotations-Ellipsoid charakteristischen optischen Eigenschaften. Wäre EDA der Durchschnitt einer spiegelnden concaven Fläche, so würden alle von dem einen Brennpunkte B_2 ausgehenden Strahlen nach dem anderen B_1 reflektirt werden und umgekehrt. Ausser dieser auf die Reflexion von Strahlen bezüglichen Eigenthümlichkeit besitzt das Rotations-Ellipsoid noch eine ähnliche hinsichtlich der Refraction. Ist nämlich die Trennungsfläche zweier verschiedener Medien ellip-

[1]) Entfernung des Aberrationspunktes von den Fusspunkten der auf die kleine Axe gefällten Perpendikel.

[2]) Entfernung von den Fusspunkten der auf die grosse Axe gefällten Perpendikel (y. y).

soidisch, und auf der concaven Seite das dichtere Medium, so entspricht dem entfernteren Brennpunkt B_2 noch ein ausserhalb im Unendlichen gelegener Brennpunkt B_0, wenn der Brechungsindex einen gewissen Werth besitzt.

Cartesius hat zuerst gezeigt, dass in der That die sphärische Aberration vollständig verschwindet, wenn die brechende Fläche der vordere Abschnitt eines Rotations-Ellipsoids ist, und wenn der Brechungsindex gleich ist der halben grossen Axe, dividirt durch die Excentricität.

Verhält sich z. B. in Fig. 16 $AE : B_1B_2 = n : 1$, ist also $n = AE : B_1B_2 = a : e = 1 : \varepsilon$, dann finden die parallelen Strahlen MD und TA ihre Vereinigung sämmtlich in B_2. Den Quotienten $e : a$ bezeichnet die Astronomie als numerische Excentricität und mit dem Buchstaben ε. Der Index muss also der reciproke Werth der numerischen Excentricität sein.

Der Beweis ist folgender: Man zieht durch D die Linie DM ∥ AE und macht sie gleich DB_2; man halbirt den Winkel B_1DB_2 durch die Linie DN und fällt auf diese von M und B_2 die Perpendikel MU und B_2G. Senkrecht zu DN wird die Tangente HK gezogen und B_2D über D um das Stück $DO = DB_1$ verlängert; OB_1 ist dann ∥ UG.

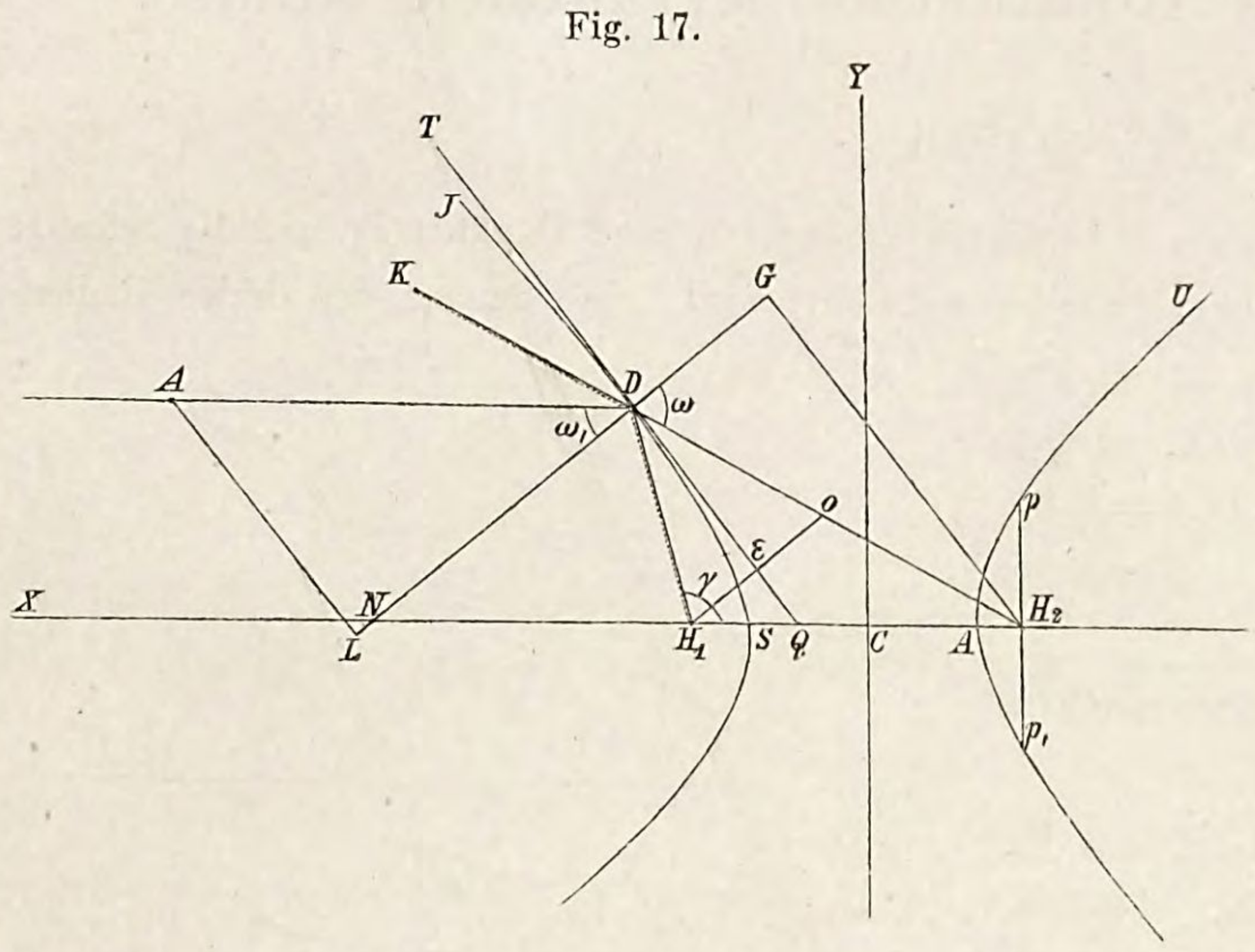
$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = \frac{MU}{MD} : \frac{GB_2}{DB_2} = \frac{MU}{GB_2} = \frac{MD}{NB_2} = \frac{DB_2}{NB_2} = \frac{OB_2}{B_1B_2} = \frac{DB_2 + DB_1}{B_1B_2}; \quad \text{also } n = \frac{a}{e} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Eine aplanatische Linse erhält man, wenn man als Vorderfläche einen Abschnitt vom gekrümmteren Scheitel des Ellipsoids nimmt und zur Hinterfläche eine um B_2 concentrische Kugelfläche.

Das Rotations-Hyperboloid.

Wir lassen die Hyperbel in folgender Weise entstehen. Im einen Brennpunkte H_2 ist ein Lineal H_2K befestigt, so dass es sich, um H_2 schwingend, bewegen kann. Vom anderen Ende K geht ein Faden KDH_1 von bestimmter Länge für jede Hyperbel nach H_1 und ist daselbst befestigt. Der Zeichenstift gleitet längs dem Lineal, indem gleichzeitig mittelst des Stiftes der Faden straff in einem Winkel (z. B. KDH_1, wo bei D der Stift zu denken ist) gegen das Lineal hingezogen wird. Indem das Lineal allmählich gedreht wird, beschreibt der Stift die Hyperbel SJ. Auf gleiche Weise erhält man den anderen Zweig AU. CS ist die halbe Axe $= a$, CH_1 die halbe Excentricität $= e$. Die Differenz der Abstände eines Punktes der Hyperbel von den beiden Brennpunkten H_1 und H_2, also die Differenz der beiden Radienvectoren, ist immer dieselbe und zwar gleich der Axe. Liegt das Lineal längs H_2H_1, so befindet sich der Stift in S. Die Radienvectoren sind H_1S und H_2S. Da $H_1S = H_2A$ ist, so ist die Differenz der Radienvectoren gleich SA, d. i. gleich der Axe. Lassen wir nun das Lineal um H_2 sich drehen, so gleitet der Stift eine gewisse Strecke weit längs des Lineales fort, ein gleich langes Stück des Fadens entfernt sich aber auch von dem Lineal, so dass jeder der von H_1 und H_2 ausgehenden Radienvectoren sich stets um ein gleiches Stück verlängert; $H_2D - H_1D$ ist somit $= SA = 2a$. Trägt man von DH_2 das Stück $DO = DH_1$ ab und zieht die Linie DQ senkrecht zu H_1O, so wird der Winkel H_1DH_2 halbirt. DQ ist Tangente an der Hyperbel im Punkte D und hat nur diesen Punkt mit derselben gemeinsam. Der Beweis ist folgender. Mögen Hyperbel und Gerade noch einen anderen Punkt T gemeinsam haben. Man verbinde T mit H_1O und H_2, dann müsste $TH_2 - TH_1 = OH_2 = SA$ sein, oder da $TH_1 = TO$ ist, $TH_2 = TO + OH_2$, was unmöglich ist. Man zieht noch die Normale GN senkrecht zur Tangente.

Fig. 17.



Die Tangente halbirt den Winkel zwischen den beiden Radienvectoren, und die Winkel, welche die Radienvectoren mit der Normalen bilden, sind einander gleich.

Lassen wir das Rotations-Hyperboloid durch Rotation der Hyperbel um die Axe SA entstehen, so ergeben sich für dasselbe aus dem Vorstehenden folgende optischen Eigenschaften. Sei JS eine convexe spiegelnde Fläche, H_2 ein Leuchtpunkt, so werden alle Strahlen von der Fläche derartig reflektirt, als wenn sie von H_1 herkämen; z. B. erhält der Strahl H_2D die Richtung der über D hinaus verlängerten H_1D. Umgekehrt, wenn UA die spiegelnde Fläche, H_1 der Leuchtpunkt wäre. Wie katoptrisch,

so verhält sich auch dioptrisch die hyperbolische Fläche der ellipsoidischen analog. Liegt auf der Seite H_1 der Fläche JDS ein dichteres Medium, so entspricht dem Brennpunkte H_2 noch ein unendlich entfernt gelegener Brennpunkt H_0, sobald die Bedingung erfüllt ist, dass die Brechungsexponenten in bestimmtem Verhältniss ($n = e : a = \varepsilon$) zu einander stehen.

Man halbirt $\measuredangle H_1 D H_2$ durch QD, zieht DN senkrecht zu QD, DA $\mp NH_2$ und macht dieselbe $= DH_2$. Darauf fällt man von H_2 und A die Perpendikel $H_2 G$ und AL auf DN, macht $DO = DH_1$ und verbindet O mit H_1; OH_1 ist $\mp$ GL.

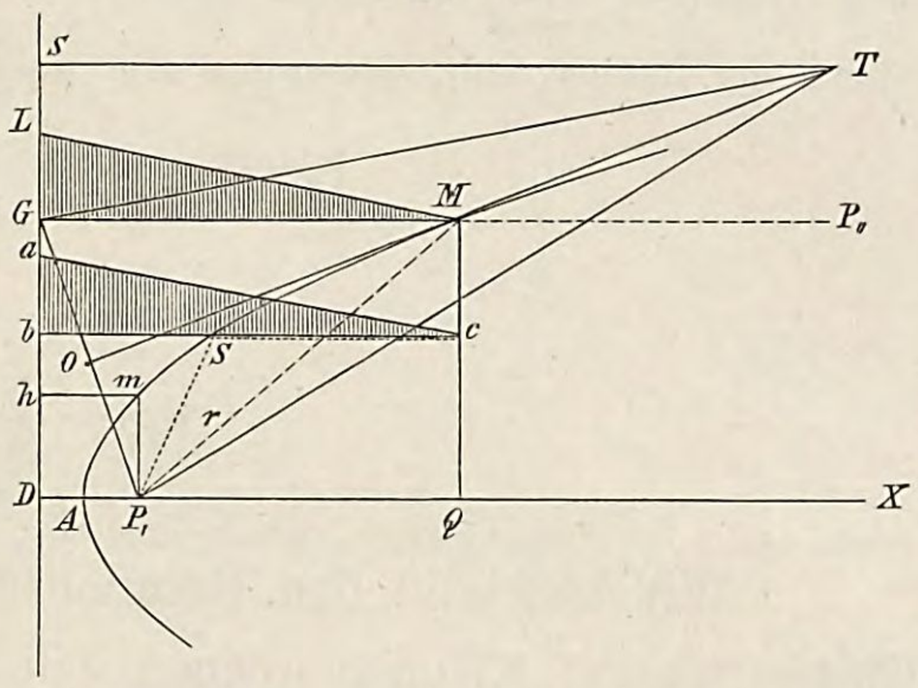
$$\frac{\sin\omega_1}{\sin\omega} = \frac{AL}{AD} : \frac{GH_2}{DH_2} = \frac{AL}{GH_2} = \frac{AD}{H_2 N} = \frac{H_2 D}{H_2 N} = \frac{OH_2}{H_2 H_1} = \frac{SB}{H_2 H_1} = \frac{1}{n} = \frac{a}{e}; \quad \text{also } n = \frac{e}{a} = \varepsilon.$$

(OH_2 = Differenz der beiden Radienvectoren, also = SA = der Axe 2a; $H_2 H_1$ = der Excentricität = 2e)

Das Rotations-Paraboloid.

Die Parabel kann als eine Ellipse aufgefasst werden, deren zweiter Brennpunkt im Unendlichen liegt. Die grosse Axe sowohl wie die Excentricität wird $= \infty$, folglich die numerische Excentricität $\varepsilon = 1$.

Fig. 18.



Eine Parabel wird folgendermassen construirt. Ein Winkelhaken abc (bei b rechter Winkel) gleitet entlang der Linie DL. An der Spitze c desselben ist ein Faden, von der Länge bc, befestigt. Das andere Ende wird in P_1 fixirt. Während man nun den Winkel längs DL fortgleiten lässt, zieht man mit dem Zeichenstift den Faden stets straff gegen bc hin und beschreibt so die Curve AmSM. Es leuchtet ein, dass die Entfernung jedes Punktes der Curve von P_1, also der Radiusvector immer gleich sein muss dem von demselben Punkte auf die Leitlinie DL gefällten Loth, also $AP_1 = AD$, $mP_1 = mh$, $SP_1 = Sb$, $MP_1 = MG$ u. s. w.

Die Senkrechte $mP_1 = mh = DP_1$ wird der Parameter (p) genannt. Halbirt man den Winkel GMP_1 durch die Gerade MO, so ist diese letztere Tangente an der Parabel, und hat nur den einen Punkt M mit dieser gemeinsam. Wäre noch ein zweiter Punkt T beiden gemeinschaftlich, so verbinde man T mit G und P_1 und fälle die Senkrechte Ts. Dann ist $TG = TP_1$. Läge aber T auf der Parabel, so müsste TP_1 und mithin auch TG = Ts sein, was unmöglich ist. Wie bei der Ellipse bildet also die Tangente mit den Radienvectoren $P_1 M$ und $P_2 M$ gleiche Winkel, und die Normale halbirt den Winkel zwischen beiden Radienvectoren.

Von jedem Punkte der Parabel geht ein Radiusvector nach dem ersten Brennpunkte, der andere parallel der Axe nach dem im Unendlichen liegenden zweiten Brennpunkte. Es ergiebt sich unmittelbar, dass die Radienvectoren ebenso, wie bei der Ellipse, mit der Tangente gleiche Winkel bilden. Die vom zweiten Brennpunkte kommenden parallelen Strahlen werden, sobald ein Concavspiegel die parabolische Form hat, im ersten Brennpunkte vereinigt. Da $\varepsilon = 1$ ist, besitzt die Parabel keine dioptrische Bedeutung. Man kann, um die Analogie mit dem Ellipsoid und Hyperboloid zu wahren, sagen, die von einem in unendlicher Entfernung auf der convexen Seite des Paraboloids gelegenen Brennpunkte kommenden Strahlen werden in dem auf der concaven Seite unendlich entfernt gelegenen zweiten Brennpunkte vereinigt.

Formeln für die Curven zweiten Grades.

Coordinaten:	Orthogonale (vom Mittelpunkt)	Polare
Parabel	$y = \sqrt{2px}$	$\varrho = \frac{p}{1 + \cos\gamma}$
Ellipse	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$	$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\gamma}$
Hyperbel	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\gamma}$

Der Parameter p ist $= b^2 : a$. Die Polargleichung $\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\gamma}$ ist ersten Grades und für alle drei Curven zweiten Grades gültig. Bei der Ellipse ist ε oder $e : a < 1$, bei der Hyperbel > 1 und bei der Parabel, wo sowohl a wie $e = \infty$ ist, $= 1$.

Für den Krümmungsradius und die Normale der Ellipse erhält man die Formeln in der Form: $r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\delta)^{\frac{3}{2}}}$ und $N = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\delta}}$, wenn man in den gewöhnlichen Formeln $y = N \sin\delta$ setzt. Aus der Formel $N = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}$

folgt $N^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2 \varepsilon^2)$, und wenn man $a + \varepsilon x = z_2$, $a - \varepsilon x = z_1$ setzt: $N^2 = \frac{b^2}{a^2} z_1 z_2$. Ein bekannter trigonometrischer Satz heisst: $\cos^2 \psi = \frac{(z_1 + z_2 + 2e)(z_1 + z_2 - 2e)}{4 z_1 z_2}$; $[z_1 + z_2 = 2a;\ a^2 = b^2 + e^2]$ $\cos^2 \psi = \frac{4(a^2 - e^2)}{4 z_1 z_2} = \frac{b^2}{z_1 z_2}$. Multiplicirt mit $N^2 = \frac{b^2 z_1 z_2}{a^2}$, folgt $N^2 \cos^2 \psi = \frac{b^4}{a^2} = p^2$; $\cos^2 \psi = \frac{p^2}{N^2}$; $\cos \psi = \frac{p}{N}$ und $N = \frac{p}{\cos \psi}$. Nun ist $r = \frac{a^2}{b^4} N^3$, folglich $\frac{p^3}{\cos^3 \psi} = r \frac{b^4}{a^2} = r p^2$; $r = \frac{p}{\cos^3 \psi} = \frac{N}{\cos^2 \psi}$. Die Normale ist somit gleich der doppelten Projection des Krümmungsradius auf den Radiusvector. Fällt man von N (Fig. 16) die Senkrechte NP und errichtet in P die Senkrechte PR, so ist R der Mittelpunkt des Krümmungskreises und RD dessen Radius r. Für den gekrümmten Scheitel ist $r_0 = b^2 : a = p$; $N = p : \cos \psi$ und da $\psi = 0$, $\cos \psi = 1$, $r_0 = p = N$.

Der Krümmungsradius wird in bekannter Weise mittelst Differentialgleichungen berechnet oder bequemer unter Benutzung der Homocentricitätsbedingung. Der Winkel zwischen Radiusvector und Normale $B_2 DN$ sei $= \omega_1$, der Winkel UDM (der Einfallswinkel) $= \omega$, dann muss $\sin \omega = \frac{a}{e} \sin \omega_1$ sein. Ist D durch rechtwinklige Coordinaten x, y gegeben, so ist $\operatorname{tang} DB_1 B_2 = \frac{y}{e - x}$; $\operatorname{tang} DB_2 B_1 = \frac{y}{e + x}$ und man findet den Winkel $B_1 D B_2 = 2\omega_1$. $\sphericalangle \delta$ ist $= \sphericalangle \omega$, $\sphericalangle DB_2 B_1 = \sphericalangle \omega - \omega_1$. DB_2 ist nun einmal der Radiusvector, ausserdem aber auch die hintere erste und zweite Brennweite des Bündels MDB_2:

$$P_2 = \frac{Na}{a \cos \psi - e \cos \varphi} = P_1 = \frac{r a \cos^2 \psi}{a \cos \psi - e \cos \varphi} \quad \text{und} \quad N = r \cos^2 \psi.$$

16. Aplanatische Linien und Flächen.

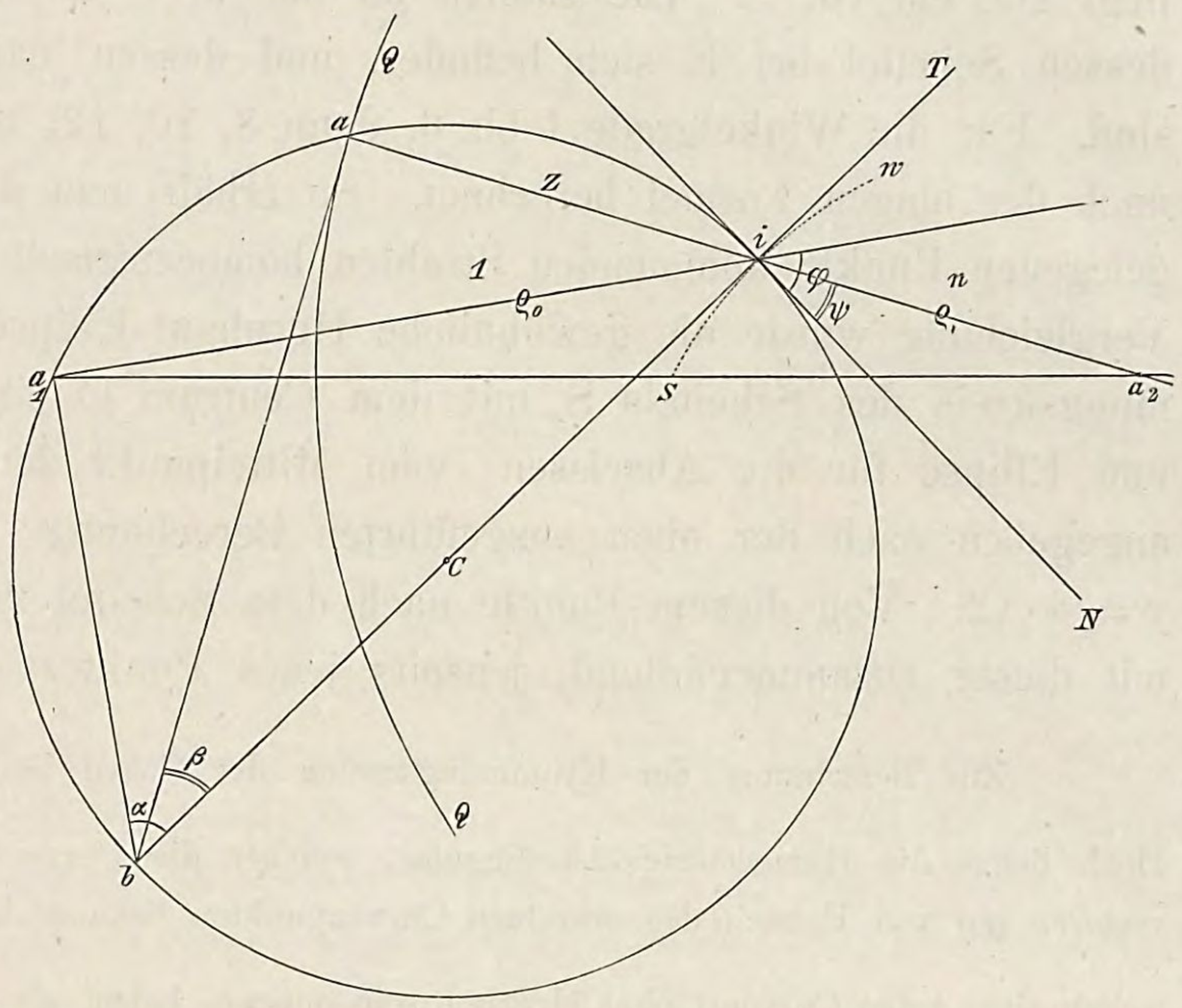
Wir haben in den Rotationsflächen vom zweiten Grade, deren Generatrix eine Hyperbel oder eine Ellipse waren, Flächen kennen gelernt, welche unter bestimmten Bedingungen aplanatisch sind, d. h. von einem Brennpunkte ausgehende Strahlen homocentrisch in einem zweiten vereinigen. Doch muss bei den in Rede stehenden Curven der eine der Brennpunkte stets im Unendlichen liegen. Die allgemeine Frage, von welcher Ellipse und Hyperbel zwei Speciallösungen sind, würde lauten: Wie bestimmt man diejenige Curve, welche alle von einem beliebig entfernten Punkte ausgehenden (homogenen) Strahlen homocentrisch in einem zweiten, ebenfalls beliebigen Punkte vereinigt?

In seinen Lectiones opticae, de Curvarum refractionibus Prop. XXXIV hat Newton schon diese Aufgabe gelöst. Die Propositio fordert: Figuram determinare, quae radios homogeneos, sive parallelos, sive ad commune aliquod punctum terminatos, ita refringet, ut refracti omnes ad aliud datum punctum accurate conveniant. Newton bemerkt auch, dass die Curven Kegelschnitte werden, wenn einer der Brennpunkte in unendliche Entfernung fortrückt.

Nehmen wir zwei Brennpunkte an: a_1 und a_2; auf der Seite von a_2 befinde sich ein Medium mit dem Index $= n$, auf der Seite von a_1 ein solches vom Index $= 1$. Es sei i der Incidenzpunkt eines Strahles. Bestimmt soll werden die Krümmung der Curve ww, welche vorhanden sein muss, damit alle von a_1 ausgehenden Strahlen homocentrisch nach a_2 gebrochen werden. Im Punkt i sei bT Tangente, Ni Normale. Man beschreibt über der Tangente als Durchmesser einen Halbkreis, welcher durch i und den einen Brennpunkt a_1 geht. Der Kreis schneide die Verlängerung von $a_2 i$ in a. Man verbinde b mit a und a_1. Dann ist $a_1 i : bi = \sin \alpha = \sin \varphi$; $ai : bi = \sin \beta = \sin \psi$ und $a_1 i : ai = \sin \varphi : \sin \psi = n$. Wir setzen $a a_2 = z$; $a_1 i = \varrho$; $a_2 i = \varrho_1$; $ai = z - \varrho_1$. Es folgt $\varrho = n(z - \varrho_1)$; $\varrho + \varrho_1 n = zn = Z$, wenn wir $zn = Z$ setzen. Die Grösse z oder Z ist augenscheinlich eine Constante, denn man kann auf jedem der von a_2 nach der Peripherie pp_1 gezogenen Radien einen Punkt i so wählen, dass der vom Centrum entferntere Abschnitt des Radius (ia) zu der Entfernung des Punktes i vom einen Brennpunkte (a_1) in bestimmtem Verhältniss (1 : n) steht, die obige Gleichung also für alle diese Punkte Gültigkeit hat. Die Wahl von Z ist beliebig; doch ist für jeden Werth desselben die Lage des Schnittpunktes S (der Curve ww mit der Axe $a_1 a_2$) und überhaupt die ganze Curve bestimmt. Wenn umgekehrt die Lage von S oder eines anderen Curvenpunktes gegeben ist, so kann der Werth von Z nicht mehr beliebig angenommen werden,

sondern man muss ihn berechnen aus der Gleichung $\varrho + \varrho_1 n = Z$, wo $\varrho = a_1 S$ und $\varrho_1 = a_2 S$ zu setzen ist, wie aus obiger Entwicklung hervorgeht. Durch Coordinaten ausgedrückt, erhalten wir, wenn $a_1 a_2 = c$ und a_1, der Leuchtpunkt, der Coordinatenanfang ist, die Gleichung: $n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + \sqrt{\xi^2 + (c - \zeta)^2} = Z$. Diese Gleichung ist vierten Grades. Nur in drei Fällen wird sie zweiten Grades, nämlich sobald $Z = 0$ ist und wenn der eine Brennpunkt a_1 oder a_2 ins Unendliche rückt. Für letztere Fälle rechnen wir ϱ oder ϱ_1 von einer Fläche aus, welche senkrecht zur Axe $a_1 a_2$ in einer bestimmten Entfernung a vom Coordinatenanfang gelegt gedacht wird.

Fig. 19.



I. Setzen wir $Z = 0$, so erhalten wir nach einer Coordinatenverschiebung, so dass der Leuchtpunkt bei $-\frac{c}{n-1}$ zu liegen kommt, und einigen Umgestaltungen: $\xi^2 + \zeta^2 = \frac{n^2 c^2}{(n^2 - 1)^2}$, die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $R = \frac{n c}{n^2 - 1}$. Dass beide Brennpunkte auf derselben Seite vom Centrum liegen, geht hervor aus der Gleichung: $\varrho + \varrho_1 n = Z = 0$. Eine der Grössen links muss negativ sein. Wir erhalten $\varrho = \frac{n c}{n-1}$ und $\varrho_1 = -\frac{c}{n-1}$. Folglich $\frac{n c}{n-1} - \frac{c}{n-1} \times n = 0$. Das einfallende Strahlenbündel muss stets convergent sein.

II. Aus $Z = n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + a - \zeta$ ergiebt sich nach einer Coordinatenverschiebung $n^2 \xi^2 + \zeta^2 (n^2 - 1) = \frac{(Z - a)^2 (n^2 - 2)}{n^2 - 1}$. Da a eine ganz beliebig angenommene Constante ist, kann man dieselbe so wählen, dass $\frac{(Z - a)^2 \cdot (n^2 - 2)}{n^2 - 1} = 1$ wird, dann erhält man: $n^2 \xi^2 + \zeta^2 (n^2 - 1) = 1$, oder die Normalform der Ellipsengleichung, $\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{a^2} = 1$, wenn $n^2 = \frac{1}{b^2}$ und $n^2 - 1 = \frac{1}{a^2}$ gesetzt wird. Dann folgt nämlich $b^2 n^2 = a^2 n^2 - a^2$; $n^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$ und $n = \frac{a}{\mp\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{e}$, d. h. wenn die Ellipse aplanatisch werden soll, muss $n = \frac{a}{e} = \frac{1}{\varepsilon}$ sein.

III. Führt man statt n ein $\frac{1}{m}$, so ergiebt sich $\frac{\xi^2}{m^2} + \zeta^2 \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) = 1$ und die Normalform der Hyperbelgleichung $\frac{\xi^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{a^2} = 1$. Wenn $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{m^2}$ und $\frac{1}{a^2} = \frac{m^2 - 1}{m^2}$ ist, wird nämlich $b^2 = a^2 m^2 - a^2$ und $m = \frac{\mp\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{e}{a}$. Wenn die Hyperbel aplanatisch werden soll, muss $n = e : a = \varepsilon$ sein.

Diese drei Fälle des Kreises, der Ellipse und der Hyperbel ausgenommen, sind alle aplanatischen Linien Curven vierten Grades. Sind die Brennpunkte und der Scheitelpunkt gegeben, so kann man die betreffende Curve nach der Formel $\varrho + \varrho_1 n = Z$ construiren. Ist z. B. $n = 1{\cdot}338$, $a_1 S = 200$, $a_2 S = 35$, so ist $c = 235$, und würden wir erhalten $200 + 35 \times 1{\cdot}338 = Z = 246{\cdot}83$. Dadurch ist Z bestimmt und wir können nach derselben Formel für jeden Werth von ϱ das betreffende ϱ_1 berechnen. Schlägt man um die Brennpunkte mit den ermittelten $\varrho\varrho$ und $\varrho_1 \varrho_1$ Kreise, so gehören die Schnittpunkte der gesuchten Curve an. Die direkte Rechnung mit der Formel: $\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + n\sqrt{\xi^2 + (235 - \zeta)^2} = 246{\cdot}83$ ist schwierig, weil sie auf 18stellige Zahlen führt. Wir setzen für $\xi\zeta$ die zusammengehörigen xy-Werthe der gewöhnlich angenommenen Hornhaut-Ellipse, um zu sehen, wie gross die Abweichung der Curve von dieser Ellipse ist. (Vergl. Taf. X Fig. 1.)

$\sqrt{2{\cdot}24^2 + 200{\cdot}319^2} + 1{\cdot}338\sqrt{2{\cdot}24^2 + 34{\cdot}681^2} - 246{\cdot}83 = 0.$	Fehler $+ 0{\cdot}03$	$\xi_1 = 2{\cdot}2$ statt $2{\cdot}24$
$\sqrt{4{\cdot}12^2 + 201{\cdot}146^2} + 1{\cdot}338\sqrt{4{\cdot}12^2 + 33{\cdot}854^2} - 246{\cdot}83 = 0.$	Fehler $= 0$	$\xi_1 = 4{\cdot}12$
$\sqrt{6^2 + 202{\cdot}616^2} + 1{\cdot}338\sqrt{6^2 + 32{\cdot}384^2} - 246{\cdot}83 = 0.$	Fehler $= - 0{\cdot}056$	$\xi_1 = 6{\cdot}1$ statt $6{\cdot}0$
$\sqrt{8{\cdot}511^2 + 206{\cdot}631^2} + 1{\cdot}338\sqrt{8{\cdot}511^2 + 28{\cdot}359^2} - 246{\cdot}83 = 0.$	Fehler $= - 0{\cdot}213$	$\xi_1 = 9{\cdot}4$ statt $8{\cdot}511$

Am bequemsten zur Berechnung dieser Curven vierten Grades ist die Polargleichung, welche man folgendermassen erhält: Es ist $\varrho + \varrho_1 n = Z$ und im Dreieck $a_1 a_2 i$ (Fig. 19) $\varrho^2 = \varrho_1^2 + c^2 - 2\varrho_1 c \cos\alpha$. Setzen wir beide Werthe von ϱ^2 einander gleich, so folgt nach einigen Umgestaltungen: $\varrho^2 - 2\varrho \frac{nZ - c\cos\alpha}{n^2 - 1} = \frac{c^2 - Z^2}{n^2 - 1}$. Die Polargleichung der aplanatischen Curven ist zweiten Grades.

Für die in Fig. 1 auf Taf. X dargestellte Curve erhält man nach Einsetzung der Werthe: $c = 235$; $n = 1 \cdot 338$; $Z = 246 \cdot 83$, die Formel: $\varrho^2 - 2\varrho(417 \cdot 9 - 297 \cdot 34 \cos\alpha) = -7212 \cdot 3$. Beim Ausziehen der Wurzel ist der negative Werth zu nehmen. S ist der Scheitel, F der zweite Brennpunkt, F_1, der erste, liegt 200 cm vor S. Die Zahlen an der in S errichteten Senkrechten geben die Grade des Winkels α, dessen Scheitel bei F sich befindet, und dessen Tangenten die betreffenden Abschnitte der Senkrechten sind. Für die Winkelgrade 1 bis 6, dann 8, 10, 12, 13° 30, 15, 16° 30, 18, 20 wurden die Radienvectoren nach der obigen Formel berechnet. So erhält man die Curve SV, welche alle von einem 200 cm vor S gelegenen Punkte kommenden Strahlen homocentrisch nach F, also senkrecht zum Kreise LL bricht. Zur Vergleichung wurde die gewöhnliche Hornhaut-Ellipse SEO mit den Brennpunkten $B_I B_{II}$ und der Krümmungskreis des Scheitels S mit dem Centrum C eingezeichnet. Auch wurden die Ordinaten der Curve und Ellipse für die Abscissen (vom Mittelpunkt der Ellipse M) $x = 10 \cdot 69$, $9 \cdot 863$, $8 \cdot 393$ und $4 \cdot 368$ angegeben nach der oben ausgeführten Berechnung. Beide Linien schneiden sich im Punkte $x = 9 \cdot 863$, $y = 4 \cdot 12$. Von diesem Punkte nach dem Scheitel zu verläuft die Curve unterhalb der Ellipse, aber fast mit dieser zusammenfallend, jenseits jenes Punktes oberhalb und sich rasch von der Ellipse entfernend.

Zur Berechnung der Krümmungsradien der Curve können wir die allgemeine Formel benutzen: $r = \mp \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Doch liefert die Homocentricitätsbedingung, welcher die Curve genügt, eine einfachere Ableitung. Da die Länge der Radienvectoren $\varrho\,\varrho$ von F nach den einzelnen Curvenpunkten bekannt ist und der Homocentricität wegen die ersten und zweiten Brennweiten eines jeden Curvenstückes identisch sein müssen, haben wir $\varrho = \frac{N n e}{n e \cos\psi - e \cos\varphi - N} = \frac{r n e \cos^2\psi}{n e \cos\psi - e \cos\varphi - r \cos^2\varphi}$, also $N = \varrho e \frac{n \cos\psi - \cos\varphi}{n e + \varrho}$, $r = \varrho e \frac{n \cos\psi - \cos\varphi}{n e \cos^2\psi + \varrho \cos^2\varphi}$ und $\frac{N}{r} = \frac{n e \cos^2\psi + \varrho \cos^2\varphi}{n e + \varrho}$, nicht, wie bei der Ellipse, $\frac{N}{r} = \cos^2\psi$, welche Form die Gleichung erhält, wenn $e = \infty$ wird. Drückt man φ durch ψ aus, so erhält man: $\cos^2\psi = 1 - \frac{n e + \varrho}{n(e + n\varrho)}\left(1 - \frac{N}{r}\right)$ und für $e = \infty$ wiederum $\cos^2\psi = \frac{N}{r}$. Zu derselben Gleichung gelangen wir auch, wenn wir $n = 1$ oder $\varphi = \psi$ setzen. Dies ist dann der Fall der Reflexion. Homocentrische Reflexion findet somit nur statt, wenn die Normale die doppelte Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvector ist, was für die Ellipse zutrifft.

Als Eigenthümlichkeit der Ellipse haben wir folgende kennen gelernt. Parallel der grossen Axe verlaufende, also von einem unendlich entfernten Leuchtpunkt kommende Strahlen gelangen im entfernteren Brennpunkt B_1 zur Vereinigung, wenn der Brechungsindex des innerhalb der Ellipse befindlichen Mediums $= a : e$ ist. Die Curve vierten Grades besitzt eine analoge Eigenschaft: Alle Strahlen von F_1, 200 cm vor S gelegen, werden homocentrisch in F_0, 35 cm hinter S, vereinigt.

Die zweite Eigenthümlichkeit der Ellipse war: alle von einem Brennpunkte ausgehenden und an der Peripherie reflektirten Strahlen vereinigen sich im anderen Brennpunkte. Eine Analogie hat die Curve vierten Grades nicht aufzuweisen. Lassen wir die von F_0 ausgehenden Radienvectoren sich an der Curve reflektiren, so schneiden die reflektirten Strahlen sich nicht in einem Punkte, sondern ihre Schnittpunkte bilden eine Curve höheren Grades, welche in der Figur mit ZZ bezeichnet ist. Die Curve besitzt keinen dem Brennpunkte B_1 analogen Punkt.

Der Strahl G, von F_1 kommend, wird nach F_0 homocentrisch gebrochen und bildet mit der Normalen die Winkel $\varphi = 47^0\,5$, $\psi = 40^0\,59$. Ebenso der Strahl J u. s. w. Ziehen wir den Strahl DG so, dass er und seine gebrochene Fortsetzung GZ dieselben Winkel φ und ψ, wie der Strahl G, mit der Normalen bildet, so haben wir einen Strahl, welcher die Homocentricitätsbedingung erfüllt und keine astigmatische Brechung zeigt, für ein dünnes Bündel, welches von einem $204 \cdot 2$ cm von G in der Richtung GD gelegenen Leuchtpunkte herkommt. Ebenso der Strahl HJ mit seiner Fortsetzung JZ.

Diese Strahlen sind die Analoga der schräg einfallenden Strahlen bei der Ellipse, welche durch den vorderen Brennpunkt derselben gehen, aber von einem unendlich entfernten Leuchtpunkte ausgesandt sind. Die Strahlen GZ und JZ u. s. w. der Curve gehen aber nicht durch einen gemeinsamen Punkt. Sie sind gleichzeitig die reflektirten Strahlen aller von F ausgehenden Bündel. Für sie gilt wohl die

Gleichung $\cos^2\psi = 1 - \frac{n e + \varrho}{n(e + n\varrho)}\left(1 - \frac{N}{r}\right)$, aber nicht gleichzeitig $\cos^2\psi = \frac{N}{r}$. Für die Curve vierten Grades existirt kein dem B_1 der Ellipse analoger Punkt.

Betrachten wir das Verhalten der Curve einem parallel der Axe auffallenden, von einem unendlich entfernten Leuchtpunkte herkommenden Strahlenbündel gegenüber. Es sind die Strahlen gezogen, welche an den Curvenpunkten eintreten, die den Radienvectoren von 4, 5, 6, 8 und 10 Grad entsprechen. Der Hauptbrennpunkt ist (F). Die Aberrationspunkte sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ (Caustica interna), die Caustica externa stellen $i_1 i_2 i_3 i_4$ dar. Wir treffen hier auf eine umgekehrte Aberrationsfigur, die Aberrationslängen $F a_1$ u. s. w. müssen mit einem dem bisher angewandten entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden. Da die brechende Fläche einem Rotationskörper angehört, so fallen die liegenden Brennlinien wieder mit der Axe zusammen, $a_1 a_2$ u. s. w., sind aber nicht mehr die zweiten, sondern die ersten; die stehenden, sonst ersten, befinden sich hinter denselben bei $i_1 i_2$ u. s. w.

Eine schematische Darstellung des Verhältnisses giebt Fig. 7 Taf. VI. $C F a_1 a_2 O$ ist die Axe. Der Meridian senkrecht zur Einfallsebene bricht stärker, so dass das dünne Bündel U zuerst zu der in der Einfallsebene liegenden Brennlinie $a_1 a_2$, dann zu der senkrecht zu derselben stehenden $b b_0$ vereinigt wird.

Zur Vergleichung ist die Brechung an der Ellipse für die an den Ellipsenpunkten I, II, III, IV eintretenden Strahlen dargestellt. Kamen die Strahlen von einem 200 cm vor S (von F_1 der Curve) her, so ist F_0, der centrale Hauptbrennpunkt (wie bei der Curve) und I, II, III, IV die Aberrationspunkte. Waren die auffallenden Strahlen parallel der Axe, so ist F Hauptbrennpunkt, 1, 2, 3, 4 die Aberrationspunkte. Man sieht, dass bei der Ellipse die Aberrationsverhältnisse noch für die parallelen Strahlen günstiger sind.

Tabelle IX.

Aplanatische Curve vierten Grades.

Formel $\varrho^2 - 2\varrho\left(\frac{Z n}{n^2 - 1} - \frac{c \cos\alpha}{n^2 - 1}\right) = \frac{c^2 - Z^2}{n^2 - 1}$; $Z = 246 \cdot 83$, $c = 235$.

Leuchtpunkt 200 mm vor der Fläche; Hauptbrennpunkt 35 m hinter derselben.

Grade (bei F_0)	Tangente	Radius-vector ϱ	Normale	Krümmungs-radius	Fuss der Normale von F_0 (KF_0)	Axenp. der homocentr. Strahlen vom Fussp. d. Normale (ZK)	Von 200 kommende Strahlen: nach F_0 homocentr. α	β	Einfallender Strahl ϱ_0	Von ∞ kommende Strahlen: α	β	(P_2) Gebroch. Strahl	Aberrationspunkt vom Fuss d. Normale (KP_2)
1	0·6109	34·97											
2	1·222	34·89											
3	1·834	34·82	7·963		26·9	3·549	13° 41	10° 11	202·1				
4	2·447	34·70	8·069	8·574	26·9	3·657	18° 12	13° 30	202·3	17° 20	12° 59	30·82	23·03
5	3·062	34·53	8·193	9·012	26·83	3·872	22° 27	16° 35	202·35				
6	3·679	34·35	8·352	9·497	26·59	4·058	26° 26	19° 26	202·4	25° 25	18° 43	30·72	22·97
8	4·919	33·86	8·709	10·76	26·23	4·326	34° 7	24° 47	202·5	32° 47	23° 52	30·24	22·74
10	6·171	33·24	9·097		25·68	4·786	40° 59	29° 21	202·55	39° 21	28° 17	30·08	22·46
12	7·44	32·56	9·547		25·13	5·335	47° 5	33° 11	204·2	45° 11	32° 1	29·76	22·2
13½	8·403	31·97											
15	9·378	31·35											
16½	10·37	30·64											
20	12·74	29·1											

Hornhaut-Ellipse.

	Entfernung des Leuchtpunktes vom Scheitel: 200 cm				∞
y	α	β	t[1]	l[2]	l[3]
0	0	0	34·95	0	0
2·24	17° 1	12° 38	33·14	1·49	0·45
4·12	30° 30	23° 7	31·8	2·00	1·17
6	46° 59	33° 7	27·83	4·50	2·71
8·511	72° 21	45° 25	18·6	9·71	6·33

[1]) t ist die Entfernung des Aberrationspunktes vom Fusspunkte der Ordinate.

[2]) l ist die Aberrationslänge, d. h. die Entfernung der Aberrationspunkte vom Hauptbrennpunkte.

[3]) Hier bedeutet l ebenfalls die Aberrationslängen, aber für ein aus unendlicher Entfernung kommendes Strahlenbündel, dessen Hauptbrennpunkt bei 30·91 liegt.

Zwischen zwei conjugirten Punkten V und F, welche in zwei verschiedenen Medien mit den Indices 1 und n liegen, lässt sich eine unendlich grosse Zahl von homocentrisch brechenden Trennungsflächen construiren. Bestimmt wird die Aufgabe erst, wenn ausser den beiden conjugirten Punkten noch die Brechungsindices und der Schnittpunkt der Verbindungslinie, d. h. der Axe mit der zu construirenden Fläche, also der Scheitel der letzteren, gegeben sind. Ist der Brechungsindex, der Krümmungsradius der brechenden Fläche am Scheitel und einer der conjugirten Punkte gegeben, so ist auch der andere, sowie die Gestalt der homocentrisch brechenden aplanatischen Fläche bestimmt. Wenn man dann die Lage des einen Punktes sich auf der Axe continuirlich verändern lässt, so erhält man eine entsprechende Reihe conjugirter Punkte und eine continuirliche Folge aplanatischer Flächen, beziehendlich Curven vierten Grades. Die Fixirung der Aufgabe in der eben gedachten Weise eignet sich besonders für unseren Zweck, weil der Index der Hornhaut und des Humor aqueus sowohl, wie der Krümmungsradius im Scheitel der Hornhaut ziemlich constant sind. Dies gilt besonders von ersterem. Indem wir für die Scheitelkrümmung den Werth des Radius $= 7 \cdot 809$, als Mittelwerth aus den verschiedenen Messungen, nehmen und für den Brechungsindex den Werth $n = 1 \cdot 338$ setzen, können wir für jede beliebige Entfernung des Leuchtpunktes den entsprechenden Bildpunkt und die Form der Curve ermitteln, welche bei der jedesmaligen Lage der conjugirten Punkte homocentrische Brechung bewirken würde. Eine Reihe solcher Curven ist in Taf. XII Fig. 1 dargestellt. S entspricht dem Hornhautscheitel mit $SC = 7 \cdot 809$ als Krümmungsradius, SCM ist die Hornhautaxe, das Medium rechts der brechenden Fläche hat den Index $1 \cdot 338$, links einen solchen $= 1$. Die Vorzeichen der Entfernungen von S werden mit oder entgegen der Lichtbewegung positiv oder negativ gerechnet.

Oben sahen wir, dass in drei Fällen die Formel für die aplanatischen Curven zweiten Grades wird, nämlich erstens, wenn $Z = 0$ ist, oder zweitens und drittens, wenn der erste oder zweite conjugirte Punkt ins Unendliche rückt. Diese drei Curven zweiten Grades sind der Kreis, die Ellipse und die Hyperbel. Aus der allgemeinen Gleichung für die aplanatischen Linien $n\sqrt{\xi^2 + \zeta^2} + \sqrt{\xi^2 + (c - \zeta)^2} = Z$ folgte, wenn man $Z = 0$ setzte: $\xi^2 + \zeta^2 = \frac{n^2 c^2}{(n^2 - 1)^2} = R^2$, die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $R = \mp \frac{n c}{n^2 - 1}$. Setzt man für R den Werth des Krümmungsradius bei $S = 7 \cdot 809$ ein, so ergiebt sich $c = \mp 4 \cdot 61$. Aus der Radienvectorengleichung für die aplanatischen Linien $Z = \varrho + \varrho_1 n$ folgt für $Z = 0$: $\varrho = - \varrho_1 n$ und, da $c = \varrho^0 + \varrho_1{}^0$ ist, $c - \varrho_1{}^0 = - n \varrho_1{}^0$ und $\varrho_1{}^0 = - c : (n - 1)$, woraus unter Einsetzung der Werthe für c und n $\varrho_1{}^0 = \mp 13 \cdot 64$ und $\varrho^0 = - n \varrho_1{}^0 = \pm 18 \cdot 25$ sich ergiebt. Die Entfernungen der Punkte von S tragen entgegengesetzte Vorzeichen und ist eine davon der Lichtbewegung entgegen zu rechnen. Beide Punkte liegen auf derselben Seite der brechenden Fläche und zwar in dem dichteren Medium. In der Tafel ist dieser Kreis mit 9 bezeichnet, der eine conjugirte Punkt, der Leuchtpunkt, mit V_{IX} bei $- 18 \cdot 25$, der zweite, der Bildpunkt, mit F_{IX} bei $+ 13 \cdot 64$. Ein in der Luft nach V_{IX} convergirendes Strahlenbündel würde nach der Brechung homocentrisch im Punkte F_{IX} vereinigt werden. Die zweite aplanatische Curve zweiten Grades war die Ellipse, wenn der Brechungsindex $n = a : e$ war und das dichtere Medium sich auf der concaven Seite der Ellipse befand. Parallel der grossen Axe auf die Convexität auffallende Strahlen gelangten dann im hinteren Brennpunkte der Ellipse zur Vereinigung. Wir haben die Gleichungen: $n = a : e$; $p = b^2 : a$ und $e^2 = a^2 - b^2$. Daraus ergiebt sich leicht: $a = n^2 p : (n^2 - 1)$. Der Krümmungsradius am Scheitel der langen Axe ist bekanntlich gleich dem Parameter. Einsetzung der Werthe ergiebt $a = 17 \cdot 69$. Weiter erhalten wir $b = \sqrt{a p} = 11 \cdot 76$ und $e = a : n = 13 \cdot 22$; $f = n p : (n - 1) = 30 \cdot 91$. In der Figur ist die Ellipse mit 5, ihr Mittelpunkt mit M, ihre Brennpunkte mit B_1 und B_2 (F_V) bezeichnet. B_2 ist zugleich der Bildpunkt F_V; der Leuchtpunkt V_V liegt vor S auf der Axe in unendlicher Entfernung. Die dritte Curve zweiten Grades, die Hyperbel, fanden wir aplanatisch, wenn der Index $= e : a$ war. Ein vom ersten Brennpunkte kommendes Strahlenbündel wurde so gebrochen, dass es im dichteren Medium der Axe parallel verlief und seinen Bildpunkt im Unendlichen hatte. Wir haben die Gleichungen: $n = e : a$; $p = b^2 : a$; $e^2 = a^2 + b^2$; woraus: $a = p : (n^2 - 1) = 9 \cdot 885$; $b = \sqrt{a p} = 8 \cdot 786$;

$e = na = 13 \cdot 22$; $f = p : (n-1) = 23 \cdot 1$. Die Hyperbel hat die Zahl 1, ihr hinterer Brennpunkt den Buchstaben β. Der vordere Brennpunkt, zugleich der Leuchtpunkt V_I, liegt $23 \cdot 1$ vor S auf der Axe, der Bildpunkt F_I rechts von S im Unendlichen. Die Parameter dieser drei Curven zweiten Grades C 9, B_1 5 und β 1 sind unter einander und dem Krümmungsradius R des Scheitels S gleich. Die übrigen aplanatischen Curven sind solche vierten Grades, welche die Polargleichung $\varrho^2 - 2\varrho\left(\frac{nZ - c\cos\alpha}{n^2-1}\right) = \frac{c^2 - Z^2}{n^2-1}$ besitzen. Es wurden drei berechnet, welche ihren Leuchtpunkt in positiver Lage links von S zwischen den Leuchtpunkten der Hyperbel und der Ellipse, V_I und $V_V (+\infty)$, haben, und drei andere, deren Leuchtpunkte rechts von S liegen, also negativ sind und sich zwischen denen der Ellipse und des Kreises V_V (als $-\infty$ angesehen) und V_{IX} befinden. Man geht in der Weise vor, dass man zuerst zu einem beliebigen Leuchtpunkte den entsprechenden Haupt-Bildpunkt, oder umgekehrt, berechnet nach der Formel $f = \frac{ner}{e(n-1) - r}$. Die Entfernung der beiden so gefundenen conjugirten Punkte von einander setzt man $= c$ und berechnet Z aus der Formel $Z = \varrho + \varrho_1 n$, indem man für ϱ und ϱ_1 die ermittelten centralen Brennweiten einsetzt. Wir haben jetzt 9 conjugirte Punktpaare und 9 entsprechende Curven, welche bezüglich dieser Punktpaare aplanatisch sind. Dieselben gehen alle von S aus, schmiegen sich daselbst dem Krümmungskreise an und laufen nach rechts oben fächerförmig auseinander.

Vervollständigen können wir die Reihe noch, indem wir zunächst den Leuchtpunkt von V_I näher an S heranrücken lassen, die zweite Brennweite wird negativ, der Bildpunkt liegt links von S. Mit weiterer Annäherung des Leuchtpunktes rückt der Bildpunkt schneller heran, bis beide in S zusammenfallen. Sobald beide Punkte in S liegen, ist die Gerade S y die aplanatische Linie. Lassen wir den in negativer Entfernung liegenden Leuchtpunkt von V_{IX} her nach S sich bewegen, so nähert sich auch der entsprechende Bildpunkt immer mehr, bis schliesslich beide in S zusammenfallen.

Die sich entsprechenden Lagen der beiden Punkte sind folgende:

V.	$+0$ bis $+23 \cdot 1$	$+23 \cdot 1$ bis $+\infty$	$-\infty$ bis $-18 \cdot 25$	$-18 \cdot 25$ bis -0
F.	-0 bis $-\infty$	$+\infty$ bis $30 \cdot 91$	$+30 \cdot 91$ bis $13 \cdot 64$	$+13 \cdot 64$ bis $+0$

Ausser diesen Curven findet sich in der Tafel noch die übliche Hornhaut-Ellipse, gestrichelt eingezeichnet mit dem Mittelpunkte m und den Brennpunkten b_1 und b_2. Dieselbe verläuft am nächsten der Curve 7. Vervollständigt man das Parameterquadrat S C 9 T, indem man die vierte Seite T 9 parallel der Axe zieht, so schneiden die aplanatischen Curven diese vierte Seite in einer fortlaufenden Reihe von Punkten, deren Abstände von der Y-Axe wir mit d_1 bis d_9 bezeichnen wollen.

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
e — a				a — e				R = p
3·34	3·685	4·27	4·36	4·47	4·78	5·09	5·31	7·809

Von den einfallenden Strahlen ist nur je einer für Hyperbel, Ellipse und Kreis gezeichnet; von den gebrochenen Strahlen dagegen mehrere für jede der neun Curven. Jeder führt die Gradzahl und die Nummer seiner Curve, letztere eingeklammert. Ein Strahl ist jedesmal ausgezogen, die übrigen vom Bildpunkte aus angedeutet oder, wenn dieser nicht mehr auf der Tafel Platz gefunden hat, von einem concentrischen Kreise aus, welcher die zu einem Bildpunkte gehörigen Strahlen zusammenfasst. Auf der SY-Axe sind die Tangenten der Winkel aufgetragen und die Endpunkte wieder mit den betreffenden Gradzahlen und Curvennummern versehen. Das Nähere findet man in der zugehörigen Tabelle. Von jeder Curve sind die in den Punkten G und J einfallenden Strahlen berechnet worden, welche für unseren Zweck von besonderer Bedeutung sind. Verbindet man nämlich diese Punkte mit dem Drehpunkte, so bilden die Verbindungslinien mit der Axe Drehungswinkel χ und χ_1 von 12° und 20°. Die Curven werden von den Verbindungslinien in Punktreihen durchschnitten, von welchen die eine mit G, die andere mit J bezeichnet ist. Die Y-Ordinaten sind in der Tabelle eingetragen. Ausser den Strahlen wurden die Normalen und Radien der Curven in diesen Schnittpunkten berechnet. In der Tafel sind die Normalen und

Radien der Punktreihe G ausgezogen, diejenigen der Punktreihe J punktirt. Ganz gezeichnet sind nur die Linien für die drei Kegelschnitte, von den übrigen, bei der G-Reihe, die Stücke zwischen der Axe und den Krümmungsmittelpunkten, während bei der J-Reihe die Schnittpunkte mit der Axe, also die Endpunkte der Normalen, und die Krümmungsmittelpunkte durch Punkte gekennzeichnet sind. Die Krümmungsmittelpunkte sind durch Linien mit einander verbunden: Ci für J und Cg für G. Beide Linien sind sehr schwach gekrümmte Curven. Die Länge der Krümmungsradien der Curven in den Punktreihen G und J beträgt:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
G.	15·7	12·4	10·4	10·2	10·0	9·3	8·9	8·6	7·8	r
	27° 7	30°	31° 2	31° 30	31° 47	32° 30	32° 59	33° 27	34° 43	δ[1]
J.	10·6	9·3	8·8	8·7	8·6	8·3	8·2	8·1	7·8	r
	18° 46	19° 39	19° 50	20°	20° 10	20° 20	20° 31	20° 38	20° 53	δ

Betrachten wir diese Zahlen mit Rücksicht auf etwaigen Hornhaut-Aplanatismus, so würde eine Curve, welche für unendliche Entfernung aplanatisch sein sollte, am Punkte J einen Krümmungsradius = 8·6 besitzen müssen, und für eine Entfernung des Leuchtpunktes von 500 mm, beziehendlich 200 mm, müsste die Länge des Radius 8·7 und 8·8 mm betragen. Wenn der Radius kürzer als 8·6 mm ist, so kann die Curve nur für negative Entfernungen des Leuchtpunktes homocentrisch sein. Von wirklichem praktisch bedeutsamem Aplanatismus wäre in diesem Falle keine Rede, wenn auch eine solche Curve aus positiver Entfernung kommende Strahlen günstiger bricht als der Kreis. Und zwar würde diese relativ homocentrische Brechung am grössten für die aus unendlicher Entfernung kommenden Strahlen sein, während sie mehr und mehr zurücktritt, je näher der Leuchtpunkt an das Auge heranrückt. Dies geht augenscheinlich daraus hervor, dass die betreffende Curve immer noch der elliptischen Curve 5 am nächsten käme, weil sie zwischen dieser und dem Kreise verläuft. Für unendliche Entfernung ist bei einer derartigen Curve eine relative annähernde Homocentricität vorhanden; von einer solchen für endliche Entfernung kann man aber erst dann reden, wenn die Länge des Radius an einem Punkte von der Lage und Excentricität des Punktes J den Werth von 8·6 mm übersteigt.

Knapp (Aubert, Physiologie S. 412) fand in einem Abstande von 21° 51′ medianwärts den Radius = 8·4715, in gleichem Abstande lateralwärts = 8·0136. Ersterer Werth, wir lassen vorläufig den Winkel α unberücksichtigt, würde dem für die elliptische, parallelen Strahlen gegenüber aplanatische, Curve 5 erforderlichen sehr nahe kommen. Alle übrigen Messungen scheinen geringere Werthe ergeben zu haben.

Homocentricität oder Aplanatismus kommt erst in Frage, wenn der Radius an einer um 20° 10 von der Hornhautaxe excentrisch gelegenen Stelle 8·6 mm übersteigt, sobald der Radius in der Hornhautaxe = 7·809 mm ist. Wir wollen dieses Verhältniss, $r : r_0 = 8\cdot653 : 7\cdot809 = 1\cdot108 : 1$, das charakteristische nennen. Findet man für den Hornhautradius im Scheitel eine andere Länge, so sind die übrigen Werthe entsprechend der in diesem Verhältniss der beiden Parameter zu einander liegenden Proportion zu ändern. Erreicht das Verhältniss der gemessenen Radien $r : r_0$ nicht den Werth des charakteristischen, so ist Aplanatismus für positive Entfernungen ausgeschlossen. Vom teleologischen Standpunkte aus wäre ein Radius von mindestens 8·6 mm bei einer Excentricität von 20° zu erwarten, da von diesem Werthe an erst die praktisch wichtige Homocentricität beginnt. Die bisher vorliegende Zahl ophthalmometrischer Messungen ist eine verhältnissmässig geringe, und es wäre möglich, dass in Zukunft sich höhere Werthe in grösserer Zahl fänden.

[1]) δ ist der Winkel, welchen der Radius mit der Axe bildet.

Tabelle X.

V = F	α	Tangente oder y		ϱ	φ	ψ	δ	k	N	r
I 23·1 = ∞	11° 24	4·95	a = 9·88	25·04	40° 16	28° 52	28° 52	33·53	10·23	17·57
(Hyperbel)	10° 28	4·5 (y)	b = 8·88	24·77	37° 35	27° 7	27° 7	33·11	9·861	15·7
	6° 44	2·785 (y)	e = 13·22	23·75	25° 30	18° 46	18° 46	31·79	8·657	10·625
II 54·02 = 54·02	10°	9·5245	c = 108·04	50·18						
	9°	8·555	Z = 126·29	50·83						
	8°	7·5913		51·48						
	5° 14	4·95		52·9	36° 46	26° 35	31° 49	44·9	9·152	12·56
	4° 52	4·49 (y)		52·92	34° 38	25° 8	30°	44·96	8·979	12·36
	2° 59	2·785 (y)		53·51	22° 34	16° 40	19° 39	45·64	8·282	9·287
III 200 = 35	8°	4·919	c = 235·83	33·86			32° 47	26·23	8·709	10·76
	7° 34	4·475 (y)	Z = 246·83	33·98	32° 12	23° 28	31° 2	26·25	8·68	10·39
	3° 20	2·785 (y)		34·61	20° 20	16° 30	19° 50	26·87	8·131	8·843
IV 500 = 32·47	16° 30	8·7	c = 532·47	28·77						
	15°	9·62	Z = 543·43	29·38						
	8° 40	4·95		31·29	33° 31	24° 19	32° 59	23·67	8·66	10·42
	8° 10	4·472 (y)		31·48	32°	23° 20	31° 30	23·87	8·559	10·22
	6°	3·413		31·87	24° 17	17° 54	23° 54	24·17	8·224	
	4° 59	2·785 (y)		32·06	20° 17	15° 1	20°	24·29	8·103	8·711
IVa 1000 = 31·66	6°		c = 1031·66	31·13	23° 35	17° 24	23° 24	23·44	8·192	
	4°		Z = 1042·34	31·4						
	2°			31·9						
V ∞ = 30·91	9° 13	4·95	a = 17·69	29·79	33° 42	24° 30	33° 42	22·22	8·582	10·36
(Ellipse)	8° 36	4·47 (y)	b = 11·75	29·89	31° 47	23° 11	31° 47	22·34	8·487	10·04
	5° 14	2·785 (y)	e = 13·22	30·53	20° 10	14° 56	20° 10	22·82	8·078	8·653
VI − 97·67 = 25	22°	10·10	c = 72·67	21·45						
	20°	9·099	Z = 64·22	22·0						
	11° 12	4·95		23·95	31° 14	22° 48	34°	16·638	8·319	9·475
	10° 41	4·465 (y)		24·09	29° 49	21° 49	32° 30	16·66	8·31	9·277
	6° 29	2·785 (y)		24·665	18° 41	13° 51	20° 20	16·99	8·015	8·332
VII − 57·04 = 22	25°	10·26	c = 35·04	18·54						
	12° 41	4·95	Z = 27·6	21·06	29° 29	21° 35	34° 16	13·76	8·213	9·029
	12° 11	4·46 (y)		21·13	28° 22	20° 48	32° 59	13·785	8·193	8·908
	7° 23	2·785 (y)		21·67	17° 42	13° 8	20° 31	14·05	8·01	8·241
VIII − 42·35 = 20	28°	10·63	c = 22·35	16·62						
	13° 54	4·95	Z = 15·59	19·09	28° 8	20° 38	34° 32	11·87	8·09	8·756
	13° 27	4·456 (y)		19·16	27° 14	20°	33° 27	11·89	8·084	8·61
	8° 8	2·785 (y)		19·69	16° 50	12° 30	20° 38	12·22	7·903	8·133
IX − 18·25 = 13·64							34° 43			
(Kreis)			(r = 7·809)				20° 53		7·809	7·809

Die Tafel und die Tabelle lassen sich verwenden, um die zu den durch ophthalmometrische Messung ermittelten Krümmungsradien gehörigen Curven zu bestimmen. Zuerst ist nach dem Mandelstamm'schen Verfahren, indem man zu beiden Seiten der Gesichtslinie zwei gleich grosse Krümmungsradien aufsucht, die Lage der Hornhautaxe und der Winkel α zu bestimmen, dann misst man in einem Abstande von 20° 10′ den Krümmungsradius. Findet man einen Werth für denselben, welcher zu dem Scheitelradius in dem charakteristischen Verhältnisse steht wie 1·108 : 1, so ist die Hornhaut aplanatisch für die Ferne, ihre Krümmung entspricht der Curve V, der homocentrischen Ellipse. Grössere Werthe bedeuten Aplanatismus für endliche Entfernung, und die Lage der Curve in Beziehung zu den berechneten und in die Tafel eingezeichneten lässt sich ermitteln, indem man feststellt, wohin auf der Linie Ci der Krümmungsmittelpunkt zu liegen kommt. Man nimmt die Länge des Krümmungsradius, im Verhältniss des gefundenen Parameters zu dem der Tafel zu Grunde liegenden reducirt, und der Ver-

grösserung der Tafel entsprechend mit 20 multiplicirt, also für einen Millimeter zwei Centimeter, in den Cirkel, setzt den einen Fuss bei J ein und zwar, wenn das Verhältniss dem charakteristischen der homocentrischen Ellipse nahe kommt, in der Mitte, bei grösseren Werthen näher der Hyperbel, bei kleineren näher dem Kreise, und bezeichnet nun den Punkt auf Ci, in welchem der andere Fuss des Cirkels diese Linie trifft. Die 20fache Vergrösserung ermöglicht eine Genauigkeit von fast 2 Decimalen, welche vorläufig allen praktischen Anforderungen genügen dürfte. Auf diese Weise erfahren wir, zwischen welchen der berechneten Curven die Krümmungscurve der gemessenen Hornhaut liegt und gleichzeitig, ob Aplanatismus für positive Entfernungen existirt oder nicht. Ist das gemessene Verhältniss kleiner als das charakteristische der homocentrischen Ellipse, so besteht Aplanatismus nur für negative Entfernungen. Praktischen Werth hat das Resultat dann nur insofern, als auch die daraus sich ergebenden Curven geringere Aberration aufweisen als der Kreis, wenn auch, wie gesagt, kein Aplanatismus für positive Entfernungen vorhanden ist. Behufs weiterer Schlussfolgerungen müssen erst zahlreichere Messungen ausgeführt werden. Doch seien hier einige Ausblickpunkte angedeutet. Bei einem Auge, welches eine ausserordentliche Sehschärfe für die Ferne besitzt, welches zum Beispiel die Jupitermonde ohne Glas sieht, würde man das charakteristische Verhältniss der homocentrischen Ellipse erwarten. Andererseits kommen Augen vor, deren Sehschärfe für die Ferne sehr niedrig und auch durch Gläser auf keine Weise erheblich zu bessern ist, welche aber in der Nähe feine Schrift mühelos lesen. In solchen Fällen könnte sich die Hornhautkrümmung mehr der Curve 2 und der Hyperbel nähern.

Mit welcher Annäherung lässt sich die Krümmung der aplanatischen Curven durch Ellipsen oder Curven zweiten Grades überhaupt ausdrücken? Da diese Ellipsen denselben Krümmungsradius am Scheitel besitzen müssen, so haben sie auch denselben Parameter gleich diesem Radius. Fällen wir von den Schnittpunkten der Curven mit der vierten Seite des Parameterquadrates J 9 Perpendikel auf die Axe SX, so sind die Fusspunkte die Brennpunkte von Ellipsen, welche die verlangte Scheitelkrümmung haben und durch denselben Schnittpunkt mit der vierten Seite gehen, wie die betreffende Curve. Aus den Gleichungen $a - e = d$; $p = b^2 : a$; $e^2 = a^2 - b^2$ können wir a berechnen $a = d^2 : (2d - p)$.

	Hyperbel		Ellipsen						Kreis
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
a	9·88	30·94	24·25	20·87	17·69	12·29	10·93	10·03	7·809

I ist die homocentrische Hyperbel, V die homocentrische Ellipse, bei der Curve II wird $2d - p$ negativ, die entsprechende Curve ist daher keine Ellipse, sondern eine Hyperbel.

Man kann auch diejenige Ellipse berechnen, welche am Scheitel S mit der betreffenden Curve eine möglichst innige Berührung eingeht. Nennen wir eine Berührung nten Grades eine solche, wenn beide Curven $n + 1$ unendlich nahe Punkte gemeinsam haben, so kann die gesuchte Ellipse mit der Curve eine Berührung 4ten Grades eingehen.

Die Ellipse ist durch die Polordinaten der Curve auszudrücken. Der Pol ist also der Bildpunkt der Curve, sein Abstand von $S = f$. In der Gleichung $y^2 a^2 + x^2 b^2 = a^2 b^2$ haben wir für x und y, ϱ, α und f einzuführen. Durch Einsetzen von $y = \varrho \sin\alpha$ und $x = \varrho \cos\alpha - (f - a)$ erhalten wir die Polargleichung der Ellipse: $\varrho^2 [a + \cos^2\alpha (p - a)] - 2\varrho p \cos\alpha (f - a) = p f (2a - f)$. Von dieser Gleichung und der entsprechenden der Curve: $\varrho^2 (n^2 - 1) - 2\varrho (nZ - c\cos\alpha) = c^2 - Z^2$ sind die vier ersten Differentialquotienten zu bilden. Aus denselben wird ϱ und α eliminirt und a berechnet.

Curve IV. $\varrho^2 - 2\varrho\left(\frac{nZ}{n^2 - 1} - \frac{c\cos\alpha}{n^2 - 1}\right) = \frac{c^2 - Z^2}{n^2 - 1}$. Wir setzen $\frac{nZ}{n^2 - 1} = A$; $-\frac{c}{n^2 - 1} = B$; $\frac{c^2 - Z^2}{n^2 - 1} = C$;

und erhalten: $\varrho^2 - 2\varrho(A + B\cos\alpha) = C$. Es sei $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho^{I}$; $\frac{d^2\varrho}{d\alpha^2} = \varrho^{II}$; $\frac{d^3\varrho}{d\alpha^3} = \varrho^{III}$; $\frac{d^4\varrho}{d\alpha^4} = \varrho^{IV}$.

I. $\varrho\varrho^{I} - \varrho^{I}(A + B\cos\alpha) + \varrho B\sin\alpha = 0$ || also für $\alpha = 0$ auch $\varrho_0{}^{I} = 0$

II. $\varrho\varrho^{II} + \varrho^{I\,2} - \varrho^{II}(A + B\cos\alpha) + 2\varrho^{I} B\sin\alpha + \varrho B\cos\alpha = 0$ || für $\alpha = 0$ folgt $\varrho_0{}^{II} = -\frac{\varrho B}{\varrho - A - B}$

III. $\varrho\varrho^{III} + 3\varrho^{I}\varrho^{II} - \varrho^{III}(A + B\cos\alpha) + 3B\varrho^{II}\sin\alpha + 3B\varrho^{I}\cos\alpha - B\varrho\sin\alpha = 0$ || für $\alpha = 0$ auch $\varrho_0{}^{III} = 0$

IV. $\varrho\varrho^{IV} + 4\varrho^{I}\varrho^{III} + 3\varrho^{II\,2} - \varrho^{IV}(A + B\cos\alpha) + 4B\varrho^{III}\sin\alpha + 6B\varrho^{II}\cos\alpha - 4B\varrho^{I}\sin\alpha - B\varrho\cos\alpha = 0$ || für $\alpha = 0$ folgt $\varrho_0{}^{IV}(\varrho_0 - A - B) = B(\varrho_0 - 6\varrho_0{}^{II}) - 3\varrho_0{}^{II\,2}$.

Setzt man die Werthe ein und berücksichtigt, dass $Z = c + \varrho_0 (n - 1)$ ist, so ergiebt sich

$$\varrho_0^{II} = \frac{\varrho_0 c}{(\varrho_0 - c)(n - 1)} \text{ und } \varrho_0^{IV} = \frac{1}{(c - \varrho_0)(n - 1)} [c(\varrho_0 - 6\varrho_0^{II}) + 3\varrho_0^{II\,2}(n^2 - 1)].$$

Curve II. Grades (Ellipse). $\varrho^2 [a + \cos^2\alpha (p - a)] - 2\varrho p \cos\alpha (f - a) = pf(2a - f)$. Wir setzen $k = pf(2a - f)$; $b_1 = p - a$; $c_1 = p(f - a)$ und erhalten: $\varrho^2 (a + b_1 \cos^2\alpha) - 2 c_1 \varrho \cos\alpha = k$.

I. $\varrho\varrho^I (a + b_1 \cos^2\alpha) - \frac{1}{2} b_1 \varrho^2 \sin 2\alpha - c_1 \varrho^I \cos\alpha + c_1 \varrho \sin\alpha = 0 \;\|\;$ für $a = 0$ folgt $\varrho_0^I = 0$

II. $\varrho^{I\,2} (a + b_1 \cos^2\alpha) + \varrho\varrho^{II} (a + b_1 \cos^2\alpha) - 2 b_1 \varrho\varrho^I \sin 2\alpha - b_1 \varrho^2 \cos^2\alpha - c_1 \varrho^{II} \cos\alpha + 2 c_1 \varrho^I \sin\alpha + c_1 \varrho \cos\alpha = 0$ $\|$ für $\alpha = 0$ folgt: $\varrho_0^{II} [(a + b_1)\varrho_0 - c_1] = (b_1 \varrho_0 - c_1)\varrho_0$

III. $3\varrho^I\varrho^{II} (a + b_1 \cos^2\alpha) - 3 b_1 \varrho\varrho^{II} \sin 2\alpha - 3 b_1 \varrho^{I\,2} \sin 2\alpha + \varrho\varrho^{III} (a + b_1 \cos^2\alpha) - 6 b_1 \varrho\varrho^I \cos 2\alpha + 2 b_1 \varrho^2 \sin 2\alpha - c_1 \varrho^{III} \cos\alpha + 3 c_1 \varrho^{II} \sin\alpha + 3 c_1 \varrho^I \cos\alpha - c_1 \varrho \sin\alpha = 0 \;\|\;$ für $\alpha = 0$ folgt $\varrho\varrho^{III} (a + b_1) - c_1 \varrho^{III} = 0$ und $\varrho_0^{III} = 0$

IV. $4\varrho^I\varrho^{III} (a + b_1 \cos^2\alpha) + 3\varrho^{II\,2} (a + b_1 \cos^2\alpha) - 12\varrho^I\varrho^{II} b_1 \sin 2\alpha - 4\varrho\varrho^{III} b_1 \sin 2\alpha - 12\varrho\varrho^{II} b_1 \cos 2\alpha - 12\varrho^{I\,2} b_1 \cos^2\alpha + \varrho\varrho^{IV} (a + b_1 \cos^2\alpha) + 16\varrho\varrho^I b_1 \sin 2\alpha + 4\varrho^2 b_1 \cos 2\alpha - c_1 \varrho^{IV} \cos\alpha + 4 c_1 \varrho^{III} \sin\alpha + 6 c_1 \varrho^{II} \cos\alpha - 4 c_1 \varrho^I \sin\alpha - c_1 \varrho \cos\alpha \;\|\;$ für $\alpha = 0$ folgt $\varrho_0^{IV} = \frac{c_1 \varrho_0 - 6 c_1 \varrho_0^{II} - 4\varrho_0^2 b_1 + 12\varrho_0\varrho_0^{II} b_1 - 3\varrho_0^{II\,2}(a + b}{\varrho_0 (a + b_1) - c_1}$

Setzt man die Werthe $b_1 = p - a$: $c_1 = p(f - a)$ ein und beachtet, dass $\varrho_0 = f$ ist, so ergiebt sich

$$\varrho_0^{II} = \frac{b_1 (\varrho_0 - c_1)\varrho_0}{(a + b_1)\varrho_0 - c_1} = \frac{\varrho_0 (p - \varrho_0)}{p}; \quad \varrho_0^{IV} = \frac{1}{ap} [\varrho_0 p (\varrho_0 - a) - 6\varrho_0^{II} p (\varrho_0 - a) - 4\varrho_0^2 (p - a) + 12\varrho_0\varrho_0^{II} (p - a) - 3\varrho_0^{II\,2} p];$$

aus $\varrho_0^{II} = \frac{\varrho_0 (p - \varrho_0)}{p}$ folgt $p\varrho_0^{II} - p\varrho_0 = -\varrho_0^2$ und $p = -\frac{\varrho_0^2}{\varrho_0^{II} - \varrho_0} = \frac{\varrho_0^2}{\varrho_0 - \varrho_0^{II}}$

und

$$\varrho_0^{IV} = \frac{1}{a\varrho_0} [a(3\varrho_0^2 - 10\varrho_0^{II}\varrho_0 + 12\varrho_0^{II\,2}) - 3(\varrho_0^3 - 2\varrho_0^{II}\varrho_0^2 + \varrho_0^{II\,2}\varrho_0)].$$

Die betreffenden Differentialquotienten sind gleichzusetzen:

$\varrho_0^{II} = \frac{\varrho_0 c}{(\varrho_0 - c)(n - 1)} = \frac{\varrho_0 (p - \varrho_0)}{p}$. Die Identität beider Grössen erhellt sofort, wenn man in der Gleichung für die paraxialen conjugirten Brennweiten $f = \frac{n e r}{(n - 1) e - r}$ die betreffenden Werthe einsetzt, nämlich $\varrho_0 = \frac{n p (c - \varrho_0)}{(n - 1)(c - \varrho_0) - p}$, hieraus p bestimmt und den Werth von $p = \varrho_0 \frac{(n - 1)(c - \varrho_0)}{n(c - \varrho_0) + \varrho_0}$ in die obige Gleichung rechts einsetzt.

$$\varrho_0^{IV} = \frac{1}{(c - \varrho_0)(n - 1)} [c(\varrho_0 - 6\varrho_0^{II}) + 3\varrho_0^{II\,2}(n^2 - 1)] = \frac{1}{a\varrho_0} [a(3\varrho_0^2 - 10\varrho_0^{II}\varrho_0 + 12\varrho_0^{II\,2}) - 3(\varrho_0^3 - 2\varrho_0^{II}\varrho_0^2 + \varrho_0^{II}\varrho_0^2])$$

Woraus für a, die Halbaxe derjenigen Curve zweiten Grades, welche mit der Curve vierten Grades im Scheitel die möglichst innige Berührung eingeht, sich folgender Werth ergiebt:

$$a = \frac{3\varrho_0 (c - \varrho_0)(n - 1)(\varrho_0 - \varrho_0^{II})^2}{(c - \varrho_0)(n - 1)(3\varrho_0^2 - 10\varrho_0^{II}\varrho_0 + 12\varrho_0^{II\,2}) - \varrho_0 [c(\varrho_0 - 6\varrho_0^{II}) + 3\varrho_0^{II\,2}(n^2 - 1)]},$$

worin $\varrho_0^{II} = \frac{\varrho_0 c}{(\varrho_0 - c)(n - 1)} = \frac{\varrho_0 (p - \varrho_0)}{p}$, $c = \frac{\varrho_0 (\varrho_0 - p)(n - 1)}{\varrho_0 (n - 1) - np}$ ist. Mittelst dieser zuletzt aufgeführten Gleichungen kann man, bei bestimmtem Parameter und Index für jede beliebige hintere conjugirte Brennweite f oder ϱ_0, die vordere conjugirte Brennweite und diejenige Ellipse oder Curve zweiten Grades überhaupt berechnen, welche die vom vorderen conjugirten Punkte ausgehenden Strahlen annähernd homocentrisch im hinteren Brennpunkte vereinigt.

Berechnen wir auf diese Weise die anschmiegenden Curven zweiten Grades und tragen wir dann die Entfernungen $d_1 = a - e$ von S aus auf der Axe ab, so erhalten wir die Brennpunkte derselben. Die in dem Brennpunkte errichteten Parameter treffen die vierte Seite des Parameterquadrates in Punkten, in welchen auch die Curven zweiten Grades dieselbe schneiden. Aus der nachstehenden Tabelle ist ersichtlich, dass diese Schnittpunkte der anschmiegenden Ellipsen fast identisch sind mit denjenigen der zugehörigen Curven. Wenigstens für die Curven und Ellipsen III IV VI VII VIII besteht kein erheblicher Unterschied. Erst der Schnittpunkt der Curve II mit der vierten Seite des Parameterquadrates liegt näher an SY als derjenige der Ellipse, welche mit ihr am Scheitel die möglichst innige Berührung eingeht. Die am Scheitel der Curve II sich anschmiegende Curve zweiten Grades ist noch eine Ellipse. Während die Parabel unter den im eigentlichen Sinne aplanatisch brechenden Curven keinen Platz hatte, so schiebt sie sich in die Reihe der sich diesen Curven anschmiegenden Curven zweiten Grades ein. Wir erhalten den Werth d_1 der Parabel, indem wir in der Gleichung $a = d^2 : (2d - p)$, $a = \infty$ setzen: $d_1 = p : 2 = 3 \cdot 904$. Die aplanatische Curve, welcher sich die Parabel anschmiegen würde, verläuft somit

zwischen den Curven II und III. Die Parabel bildet die Grenze zwischen den Schmiegungs-Ellipsen und Hyperbeln. Bei bestimmtem Parameter p = 7·809 und Index n = 1·338 muss die halbe grosse Axe der Ellipsen, welche im oben dargelegten Sinne für positive Entfernungen homocentrisch sein sollen, eine Länge von 17·69 mm oder darüber haben. In der beistehenden Tabelle sind neben den aplanatischen Curven I—IX diejenigen Curven zweiten Grades aufgeführt, welche mit denselben am Scheitel eine möglichst innige Berührung eingehen und welche daher ohne erheblichen Fehler wenigstens für den Abschnitt der Curve, welcher beim Auge in Frage kommt, als homocentrisch für dieselben conjugirten Brennweiten wie jene Curven angesehen werden können. Die Länge der Radien einer um 20° excentrisch gelegenen Stelle stimmt noch in der ersten Decimale mit der Länge derjenigen der betreffenden Curve überein. Die Ellipsen schmiegen sich den Curven nicht ohne Durchsetzungen an.

In Fig. 1 Taf. X bezeichnen die Schnittpunkte Z der homocentrischen dünnen Bündel mit der Axe die Lage des Brennpunktes derjenigen Ellipse, welche am Einfallspunkte des betreffenden Strahles jedesmal mit der Curve die möglichst innige Berührung eingehen würde. Man sieht, dass die Entfernung d = SZ, sobald man vom Scheitel nach der Peripherie hin fortschreitet, zuerst an Länge ab- dann aber wieder zunimmt.

Tabelle XI.

	Conjugirte Brennweiten	Anschmiegende (annähernd aplanatische) Curven zweiten Grades				Bei einem Winkel $\delta = 20^0$ messen		(a — e) oder (e — a) Curven II. Grades	(a — e) oder (e — a) Curven IV. Grades
	V F	a	b	e		N	r	d_1	d
I	23·1 = ∞	9·88	8·88	13·22	Hyperbel	8·778	10·62	3·34	3·34
Ia	48·48 = 55·2	∞	∞	∞	Parabel	8·310	9·41	3·904	
II	54·02 = 54·02	32·71	15·98	28·54	Ellipse	8·181	8·981	4·17	3·685
III	200 = 35	22·87	13·36	18·56	„	8·126	8·799	4·31	4·27
IV	500 = 32·47	19·37	12·3	14·97	„	8·097	8·703	4·40	4·36
IVa	1000 = 31·66	19·24	12·26	14·83	„	8·095	8·700	4·41	
V	∞ = 30·91	17·69	11·75	13·22	„	8·078	8·655	4·47	4·47
VI	— 97·67 = 25	12·68	9·95	7·857	„	7·992	8·370	4·82	4·78
VII	— 57·04 = 22	10·88	9·22	5·788	„	7·940	8·210	5·092	5·09
VIII	— 42·35 = 20	9·99	8·83	4·67	„	7·909	8·113	5·32	5·31
IX	— 18·25 = 13·64	7·809	7·809	0	Kreis	7·809	7·809	7·809	7·809

D. Die Aberration an Flächen und in Linsen bei sich änderndem Brechungsindex.

17. Die sphärische Fläche bei abnehmendem Index.

Diese zweite Correctionsweise kommt in Wirklichkeit nur bei zwei brechenden Flächen, bei Linsen, in Anwendung. Man könnte sich aber vorstellen, dass, was bei dem Ellipsoid durch Abnahme der Krümmung gegen die Peripherie hin erreicht wird, auch durch allmähliche Verkleinerung der Brechungsindices zu erzielen wäre. Der Brechungsindex sei am Scheitel A Fig. 1 Taf. I = m und verringere sich gegen B hin bei L, K u. s. w. in der Art, dass die an diesen Punkten eintretenden Strahlen alle nach dem Hauptbrennpunkt F gebrochen werden.

Bezeichnen wir die Brechungswinkel (etwa bei B) mit φ und ψ, so ist $\sin(\varphi - \psi) = r \sin\psi : CF$. Da $CF = r(m-1)$ ist, folgt: $\sin(\varphi - \psi) = \sin\psi\,(m-1)$; $\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} = \cos\varphi + (m-1)$ und $n = \sqrt{n^2 - 4(m-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. Setzt man z. B. $m = 1{\cdot}5$, so erhält man folgende Werthe:

$\varphi = 70^0$	30^0	20^0	10^0
$n = 1{\cdot}2615$	$1{\cdot}455$	$1{\cdot}48$	$1{\cdot}495$

In gleicher Weise kann die Aberration durch ellipsoidische Krümmung der Fläche ALB corrigirt werden. Man findet die Excentricität aus der Formel $e = AF : (m + 1)$, wo AF die Hauptbrennweite und m der Brechungsindex ist. In der Figur ist AEE ein Stück der Generatrix der ellipsoidischen Fläche.

Ein Medium mit nach der Peripherie hin abnehmendem Index ist physikalisch undenkbar, die Betrachtung desselben ist nur von Interesse als Ueberleitung zu den geschichteten Linsen. Ebensowenig wie durch Abnahme der Krümmung nach der Peripherie zu lässt sich vermittelst Abnahme des Index ein Medium construirt denken, welches für verschiedene Entfernungen aplanatisch wäre. Eine für paraxiale Strahlen homocentrisch brechende Fläche ist auch nicht gleichzeitig aplanatisch für schiefe Strahlenbündel. Denkt man sich ein schiefes Bündel in der Richtung von BC auf die Fläche fallen, so kann der Index oder die Krümmung von A nach B nicht zugleich ab- und zunehmen.

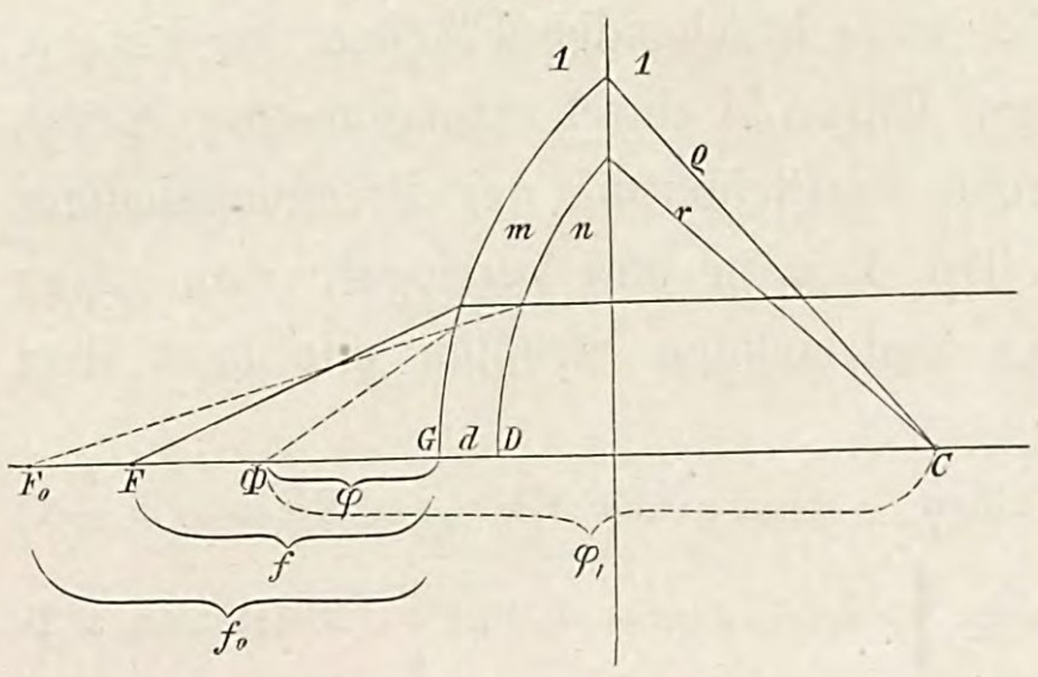
18. Die geschichtete Linse, Schachtellinse.

Unter geschichteter Linse ist eine solche zu verstehen, die einen stärker brechenden Kern und eine oder mehrere schwächer brechende Schichten besitzt. Wir fassen nur die Biconvexlinse ins Auge. Senff wies zuerst nach, dass der Brechungsindex der Gesammtlinse nicht etwa dem arithmetischen Mittel sämmtlicher Schichten entspricht, sondern sogar noch grösser ausfällt als der des Linsenkerns. Listing sagt: „Die von aussen nach innen an Brechkraft zunehmenden Schichten ertheilen dem durchgehenden Strahl, wie die Atmosphäre dem Strahl eines Sternes, eine krummlinige Trajectorie, deren Sehne zwischen den Endpunkten beiderseits mit den in der Linse verlängerten Wegen des Strahles vor und hinter der Linse grössere Winkel bildet, als die an ihren Endpunkten an die Curven gelegten Tangenten. Durch die Annahme eines statt der ungleich stark brechenden Linse zu substituirenden homogenen Mediums wird die Trajectorie durch ihre Sehne ersetzt, und dadurch die in ihrem Verlauf bewirkte allmähliche Richtungsänderung lediglich an ihre Endpunkte, d. i. an die Grenzflächen der Linse verlegt, woraus die Nothwendigkeit der Erhöhung des Brechungsindex einleuchtet.“

Stellwag[1]) will nicht zugeben, dass die Schichtung an und für sich eine stärkere Brechkraft bedinge, sondern meint, dass die kürzere Brennweite abhänge von der stärkeren Krümmung der inneren Schichten bei den thierischen Linsen. Auch auf den Zeichnungen, welche Helmholtz von den thierischen Linsen giebt, treffen wir die Zunahme der Krümmung gegen den Kern hin. In der Phys. Optik S. 72 heisst es, dass der Kern „eine fast kugelige biconvexe Linse von positiver Brennweite darstellt". Ob diese Ansicht thatsächlich berechtigt ist, werden wir später untersuchen.

Der Beweis für den Satz, dass eine geschichtete Linse mit stärker brechendem Kern, auch wenn die Krümmung der Flächen nach dem Inneren hin nicht zunimmt, doch stärker bricht, als eine homogene Linse von gleicher Form und einem Index gleich dem des am stärksten brechenden Kernes, lässt sich leicht folgendermassen führen. Gegeben sei eine von Luft umgebene geschichtete Planconvexlinse, deren Flächen concentrisch sind, C sei der Krümmungsmittelpunkt, r der Radius der Grenzfläche des Kernes, ϱ der der Linse überhaupt, n der Index des Kernes, m der der Schale, $d = \varrho - r$, F sei der Brennpunkt der homogenen Linse gleicher Form mit dem Index $= n$, F_0 der Brennpunkt der ersten Fläche im Medium der Schale, Φ der Brennpunkt der ganzen geschichteten Linse. Es ist zu zeigen, dass Φ der zweiten Fläche näher liegt als F, dass φ kürzer ist als f. Im Grunde folgt das zu Beweisende schon aus sehr einfachen Betrachtungen. Für parallele paraxiale Strahlen ist die Brennweite einer Planconvexlinse $F = \varrho : (n - 1)$. Der Werth derselben ist um so grösser, je grösser ϱ wird. Schneidet man aus der grösseren Linse eine kleinere mit dem Radius r heraus, wobei die Krümmungsmittelpunkte dieselben bleiben, so liegt der Brennpunkt näher am Mittelpunkte. Fügt man concentrisch eine zweite Schicht hinzu, deren Brechungsexponent zwar nicht der der Luft, aber doch kleiner als n ist, so wird sich der Brennpunkt zwar vom Mittelpunkte entfernen müssen, aber niemals die Entfernung wie bei der grösseren homogenen Linse mit dem Brechungsindex n erreichen können.

Fig. 20.



Auf mathematischem Wege ist der Nachweis folgendermassen zu liefern. Es falle ein Bündel paralleler Strahlen auf die ebene Fläche; die Brennweite der ersten Fläche (I) erhält man $f_0 = rm : (n - m)$, wenn man den Brechungsindex $= m : n$ nimmt. Ferner erhalten wir $F_0 G = a = f_0 - d = \frac{rm + dm - dn}{n - m}$. Die Brennweite der zweiten Fläche (II) ist $\varphi = \frac{\varrho a}{m\varrho + am - n}$; oder nach Einsetzen des Werthes von a und da $d = \varrho - r$ ist: $\varphi = \frac{\varrho[m\varrho - n(\varrho - r)]}{m(nr - \varrho) + n(\varrho - r)}$. Nehmen wir die Brennweite vom Krümmungscentrum C ab, setzen wir also $\varphi_1 = \varphi + \varrho$, so folgt: $\varphi_1 = \frac{\varrho r n}{nr - \varrho + \frac{n}{m}(\varrho - r)}$. Wächst m, so vermindert sich der Nenner und steigt der Werth des Bruches. Das Umgekehrte geschieht bei Verminderung von m. Denkt man sich noch eine gleiche Linse hinzugefügt, so gilt der Beweis für die conjugirten Vereinigungsweiten einer Biconvexlinse.

Diesen Satz, dass eine geschichtete Linse, auch wenn die Krümmung der inneren Schichten nicht grösser ist als die der äusseren, wenn also die Trennungsflächen der Schichten parallel den Aussenflächen sind, — dass eine solche homothetisch geschichtete Linse stärkere Brechkraft besitzt als eine gleichgeformte homogene mit dem Index des Kernes, können wir auch so ausdrücken:

Je grösser in einer geschichteten Linse die Differenz zwischen den Indices des Kernes und der äusseren Schicht ist, desto mehr nähert sich die Gesammtbrechung derjenigen einer Linse mit der Form und dem Index des Kernes.

In dieser Gestalt gilt der Satz auch für schiefe Bündel. Die geschichtete Linse steht hinsichtlich ihrer Brechung immer in der Mitte zwischen einer homogenen Linse von der Form und dem Index der Schale und einer anderen, wo diese Eigenschaften denen des Kernes gleichen.

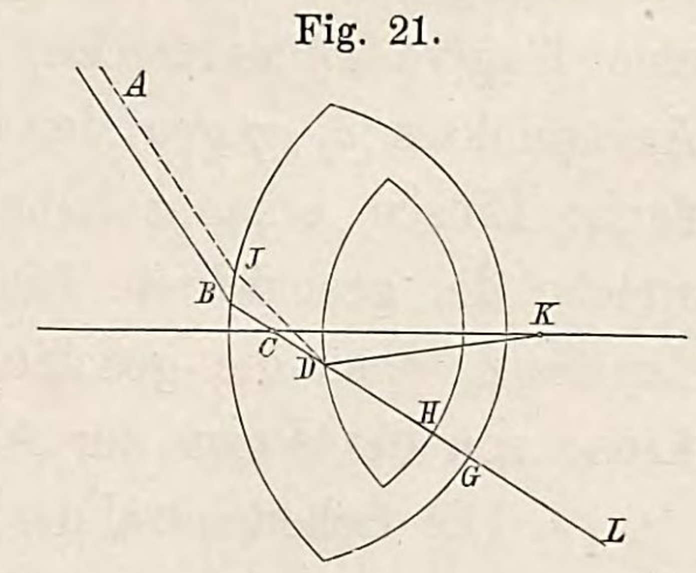
[1]) Stellwag, Die Ophthalmologie vom wissenschaftl. Standpunkte. Erlangen 1853. S. 425.

Denken wir uns den allgemeinsten Fall einer nahezu kugeligen Aussenlinse, also etwa von der Form der Schweinslinse mit homothetischem Kern. Die entsprechenden Flächen sind einander parallel und homocentrisch. Ist die Differenz der Brechungsindices von Kern und Schale sehr gering, so wird die Gesammtlinse auf die Lichtstrahlen nahezu dieselbe Wirkung äussern, wie eine homogene von gleicher Form. Lassen wir im Gegentheil die Differenz grösser werden, indem wir den Index der Schale allmählich bis Null verkleinern, so wird sich die Brechwirkung derjenigen des flachen Kerns immer ähnlicher gestalten, und endlich diese allein übrig bleiben.

Eine allgemeine Theorie der geschichteten Linse stösst auf grosse Schwierigkeiten. Die möglichen Combinationen sind ausserordentlich zahlreich. Die Schichtung kann eine solche sein, dass die Krümmung der Schichten den Aussenflächen parallel, homothetisch ist oder nicht. Die dem Kerne näheren Schichten können eine gleichbleibende, stärkere oder geringere Krümmung der Grenzflächen zeigen, so dass schliesslich der Kern eine der Aussenlinse congruente Gestalt hat oder aber kugeliger oder flacher ist. Die einzelnen Schichten können symmetrisch liegen oder die verschiedensten Abstände von den Aussenflächen haben, und ihre Anzahl kann in weiten Grenzen variiren. Das Anwachsen der Brechungsindices kann in der einen oder anderen Progression erfolgen. Kurzum ohne bestimmte Annahmen dürfte es unmöglich sein, übersichtliche und brauchbare Formeln zu erhalten. Hinsichtlich der thierischen Linsen besitzen wir keine genügende Kenntniss von der Lage, Zahl und Stärke der einzelnen Schichten und von der Krümmung ihrer Grenzflächen, um darauf exakte Berechnungen gründen zu können. Bei der Schwierigkeit der Messungen ist es auch zweifelhaft, ob diese Daten überhaupt erhältlich sind. Ständen dieselben zur Verfügung, so würde die Berechnung des Strahlenganges keine besonderen Schwierigkeiten haben. Unter so beschaffenen Umständen werde ich unten die Lücke in unserem Wissen durch direkte Messung des Strahlenganges in den thierischen Linsen auszufüllen suchen.

Es würde bei Betrachtung des Ganges schiefer Bündel in geschichteten Linsen eine grosse Erleichterung gewähren, wenn man das Resultat der ganzen Brechung durch einen passend gewählten Totalindex ausdrücken könnte. Der Gang eines einzelnen durch den optischen Mittelpunkt gehenden Strahles lässt sich mittelst eines Totalindex wiedergeben. Bei den nicht durch den optischen Mittelpunkt verlaufenden Strahlen kann nicht einmal der Gang der Strahlen mittelst eines Totalindex wiedergegeben werden. Fassen wir z. B. den Radialstrahl in einer homogenen biconvexen Linse ins Auge. Derselbe erleidet nur eine Brechung bei B und verläuft von B durch den Krümmungsmittelpunkt der Hinterfläche C nach L geradlinig. Soll in der geschichteten Linse der Strahl denselben Austrittspunkt G und dieselbe Richtung GL haben, so trifft er ebenfalls die beiden Hinterflächen bei G und H senkrecht und scheint von C herzukommen, bei D erfährt er jedoch eine Ablenkung und kann somit nicht denselben Eintrittspunkt B haben, wie in der homogenen Linse.

Fig. 21.



Hieraus folgt der wichtige Satz, dass man bei der Berechnung des Ganges von Lichtstrahlen durch geschichtete Linsen nicht eine homogene Linse mit einem Totalindex substituiren kann. Eine Ausnahme bilden nur die durch den optischen Mittelpunkt gehenden Strahlen, jedoch nur bezüglich des Ganges derselben, nicht bezüglich der Lage der Brennlinien. Letztere Thatsache lässt sich als Folgerung aus dem oben aufgestellten Satze ableiten, dass die Brechung in einer geschichteten homothetischen Linse immer die Mitte hält zwischen derjenigen in einer homogenen Linse von der Form und dem Index der Schale und einer solchen von der Form und dem Index des Kernes. Da nun der Kern eine flachere Linse darstellt, so muss auch der Charakter der Brechung sich demjenigen in den flacheren Linsen nähern. Für diese ist aber das Charakteristische die längere Brennstrecke an den Centralstrahlen. Die Annahme von Totalindices für schiefe Bündel darf daher nicht zur Grundlage mathematischer Berechnungen gemacht werden, die auf mehr als annähernde Gültigkeit Anspruch erheben.

Die Figur 1 Tafel IX giebt eine vergleichende Darstellung der Brechung in einer dreifach ge-

schichteten Linse und einer homogenen von gleicher äusserer Form, gleichem Totalindex und somit auch gleicher Brennweite von der Hinterfläche aus gerechnet. Die betreffenden Zahlen finden sich in der zugehörigen Tabelle. Die homogene Linse hat den Index $n = 1 \cdot 518$, Schale, Zone und Kern der zusammengesetzten Linse die Indices $n_1 = 1 \cdot 38$, $n_2 = 1 \cdot 41$, $n_3 = 1 \cdot 46$ und den Totalindex $= 1 \cdot 518$. Die Brennweite beider Linsen beträgt 8·9 mm von der Hinterfläche ab. Die punktirt gehaltenen Conturen und Strahlen gehören nur der geschichteten Linse an. Es ist die Refraction eines parallel zur Axe und zweitens diejenige eines schräg unter einem Winkel von 72° 30 mit der Axe auffallenden Bündels dargestellt. Nach der Brechung an der Vorderfläche der homogenen Linse ist h der Hauptbrennpunkt; mit 1. 2. 3. sind die Aberrationspunkte dreier gebrochener Strahlen bezeichnet, deren Einfallspunkte an der Vorderfläche so gewählt sind, dass die Radien mit der Axe Winkel von 15°, 30° und 45° bilden. Für die zusammengesetzte Linse bezeichnen Z, I, II, III dieselben Punkte für die gleichen Strahlen nach der Brechung an den drei Vorderflächen. Der Hauptbrennpunkt sowohl für die ganze homogene wie zusammengesetzte Linse ist z. Die Aberrationspunkte der seitlichen Strahlen sind für die homogene Linse mit 11, 22; für die zusammengesetzte mit $a_1 a_2 a_3$ bezeichnet. Der Strahl 3 der homogenen Linse gelangt nicht mehr zum Austreten, während der noch etwas peripherischer gelegene der zusammengesetzten Linse ungehindert austritt. Die homocentrisch günstigere Beschaffenheit der zusammengesetzten Linse spricht sich auch in der dem Hauptbrennpunkte näheren Lage von a_2 gegenüber dem entsprechenden Punkte 22 aus. Von dem schief unter einem Winkel von 72° 30 mit der Axe auffallenden Bündel paralleler Strahlen ist die Brechung am Centralstrahl und am Scheitelstrahl erläutert, und zwar zuerst für die zusammengesetzte Linse, zweitens für die homogene Linse mit dem gleichen Index $n = 1 \cdot 518$, welcher bei der centralen Brechung gewählt wurde und die gleiche centrale hintere Brennweite lieferte, welche die zusammengesetzte Linse besass, — endlich drittens für homogene Linsen mit so bestimmten Indices, dass ein Mal der Centralstrahl, das andere Mal der Scheitelstrahl dieselben Ein- und Austrittspunkte erhielt, wie in der zusammengesetzten Linse. Der punktirte, in einer Schlangenlinie verlaufende Strahl $P M P_1 z$ ist der Centralstrahl in der zusammengesetzten Linse; $Q M Q_1 h$ (ausgezogen) derselbe in der homogenen Linse mit gleichem Totalindex $n = 1 \cdot 518$, endlich der gestrichelte $P M P_1 h_1$ würde einer homogenen Linse mit schwächerem Index, $n = 1 \cdot 4362$, angehören. Dieser Strahl hat mit demjenigen der zusammengesetzten Linse gleiche Ein- und Austrittspunkte, dagegen liegt die Brennstrecke bedeutend ferner. Verglichen mit dem Centralstrahl der homogenen Linse von gleichem Totalindex $n = 1 \cdot 518$, zeigt der Centralstrahl der geschichteten Linse eine längere Brennstrecke, eine der Hinterfläche genäherte erste Brennlinie und eine Verschiebung des Axenpunktes α_1 gegen den Mittelpunkt der Linse hin, alles Punkte, welche wir als charakteristisch für flache Linsen erkannt haben. Wir können in der That die Abweichungen von der homogenen Linse, welche die geschichtete Linse hinsichtlich der Strahlenbrechung zeigt, nicht besser bezeichnen als durch den Satz, dass die geschichtete homothetische Linse die Mitte hält zwischen einer dickeren homogenen Linse von der Form der Aussenlinse und einer flachen homogenen Linse von der Gestalt des Kernes.

Die Scheitelstrahlen sind gleich gezeichnet und bezeichnet. Während die beiden Brennstrecken z und h (Totalindex $= 1 \cdot 518$) bedeutend von einander abweichen, ist für z und h_1 (Totalindex $= 1 \cdot 4383$) Lage und Länge nicht sehr verschieden, worauf wir die Aufmerksamkeit lenken wollen. — Der Index, welchen man für die homogene Linse wählen muss, damit ein schräger Strahl dieselben Ein- und Austrittspunkte bekommt wie in der geschichteten Linse, ist nicht identisch mit dem Totalindex für paraxiale Strahlen und nicht derselbe für Central- und Scheitelstrahlen. Es lässt sich für schiefe Bündel weder der Gang der Strahlen, ausgenommen des Centralstrahles, noch die Lage der Brennlinien, und zwar hier ohne Ausnahme, mit Hülfe eines Totalindex ausdrücken, selbst wenn man einen solchen für jeden Strahl besonders wählt.

Tabelle XII.

Biconvexe dreifach geschichtete Linse.

Schale: R = 12·25; D = 14; E = 3 = R — r; n_1 = 1·38. Zone: r = 9·25; d = 8; e = 2·875 = r — ϱ; n_2 = 1·41.
Kern: ϱ = 6 375; δ = 2·25; n_3 = 1·46; $n_2 : n_1$ = 1·029; $n_3 : n_2$ = 1·028; Totalindex = 1·518.

Paraxiales Strahlenbündel.

Hauptbrennpunkte hinter den einzelnen Flächen: I 44·49; II 37·78; III 31·14; IV 25·01; V 20·15; VI 8·97.

	Homogene Linse. Totalindex = 1·518.				Geschichtete Linse. n_1 = 1·38; $n_2 : n_1$ = 1·029; $n_3 : n_2$ = 1·028.			
φ_1	45°	30°	15°	0°	45°	30°	15°	0°
ψ_1	27° 46	19° 14	9° 45		30° 49	21° 15	10° 49	
φ_2						28° 41	14° 23	
ψ_2						27° 48	13° 58	
φ_3							20° 30	
ψ_3							19° 55	
t_1	19·26	21·1	23·12	23·65	25·71	25·77	24·04	24·765
φ_4							29° 19	
ψ_4							30° 13	
φ_5						41° 1	20° 18	
ψ_5						42° 29	20° 54	
φ_6		29° 19	14° 21		26° 23	30° 39	15° 38	
ψ_6		48°	22° 7		87° 43	44° 43	21° 50	
t_2		18·51	20·57	21·20	14·84	20·27	20·43	21·20

NB. t_1 = Entfernung der Aberrationspunkte vom Centrum der Vorderflächen.
t_2 = „ „ „ „ „ „ Hinterflächen.

Schiefes Strahlenbündel (λ = 72° 30).

Centralstrahl. (Winkel bei M = 60°.)

Homogene Linse.

n = 1·518
φ_1 34° 17
ψ_1 21° 47
P_2 = 31·88, P_1 = 27·49 $\binom{\delta_0}{17·43}$
p_2 = 6·55
p_1 = 3·841
bst = 2·707

Geschichtete Linse.

n_1 = 1·38; $n_2 : n_1$ = 1·029; $n_3 : n_2$ = 1·028.
φ_1 = 33° 9 (φ_6); φ_2 = 31° 40 (φ_5); φ_3 = 47° 10 (φ_4)
ψ_1 = 23° 21 (ψ_6); ψ_2 = 30° 40 (ψ_5); ψ_3 = 45° 30 (ψ_4)
I 39·36 / 33·18 $\binom{\delta_1}{3·35}$ II 32·69 / 27·18 $\binom{\delta_2}{3·65}$ III 25·19 / 19·39 $\binom{\delta_3}{3·72}$
IV 18·41 / 11·96 $\binom{\delta_4}{3·65}$ V 13·12 / 7·6 $\binom{\delta_5}{3·35}$ VI 5·90 / 2·27
bst = 3·63

Homogene Linse.

n = 1·4362. [1])
φ_1 = 33° 1
ψ_1 = 22° 18
P_2 = 35° 90, P_1 = 30° 72 $\binom{\delta_0}{17·6}$
p_2 = 8·42
p_1 = 5·25
bst = 3·18

Scheitelstrahl.

Homogene Linse.

n = 1·518.
φ_1 72° 30
ψ_1 38° 55
P_2 = 21·12, P_1 = 12·78 $\binom{\delta_0}{13·56}$
η = 5° 9
ϑ = 7° 50
p_2 = 4·108
p_1 = — 0·516
bst = 4·625

Geschichtete Linse.

n_1 = 1·38; $n_2 : n_1$ = 1·029.
φ_1 = 72° 30 φ_2 = 66° 15
φ_1 = 43° 43 ψ_2 = 62_0 48
I 24·26 / 12·67 $\binom{\delta_2}{5·13}$ II 17·39 / 7·57 $\binom{\delta_2}{5·28}$
(Axenpunkt 2·23 von C.)
φ_5 8° 58 φ_6 6° 58
ψ_5 9° 14 ψ_6 9° 38
V 11·09 / 1·94 $\binom{\delta_5}{2·97}$ VI 4·97 / — 0·752
bst = 5·722
(Axenpunkt 2·307 von C.)

Homogene Linse.

n = 1·4383. [2])
φ_1 72° 30
ψ_1 41° 32
P_2 22·70, P_1 12·72 $\binom{\delta_0}{13·5}$
η 5° 26
ϑ 7° 50
p_2 = 5·195
p_1 = — 0·548
bst = 5·743

[1]) Dieser Index giebt den Centralstrahl h_1 mit denselben Ein- und Austrittspunkten, welche der Centralstrahl der geschichteten Linse besitzt.

[2]) Dasselbe gilt von diesem Index bezüglich des Scheitelstrahles.

Wenn die Indices der einzelnen Schichten in geeigneter Weise abgestuft und die Schichten hinreichend dünn sind, so kann in einer geschichteten Linse die Brechung paraxialer Strahlen eine fast vollständig homocentrische sein, jedoch immer nur für eine bestimmte Objekt- und Bildentfernung. Für Leuchtpunkte in anderer Entfernung wird die Brechung wieder nicht homocentrisch. Hinsichtlich der Frage, ob gleichzeitig auch die Brechung schiefer Bündel eine homocentrische sein kann, verhält sich die geschichtete Linse anders, als die supponirte Fläche mit abnehmendem Index. Bei der geschichteten Linse gehen nämlich die der Nebenaxe des schiefen Bündels näheren Strahlen durch die Schichten mit stärkerem Index, die ferneren durch solche mit schwächerem, während sich bei jener Fläche die Sache umgekehrt verhielt. Es muss wieder unterschieden werden zwischen der eigentlichen Aberration und der Astigmasie. Da bei der geschichteten Linse für ein schiefes Bündel im Meridian der Einfallsebene, vom Centralstrahl ab gerechnet, nach dem Scheitel zu die Indices abnehmen, so ist es möglich, dass solche Linsen für diesen Meridian günstigere Aberration auch für schiefe Bündel zeigen. Die stehenden (ersten) Brennlinien würden näher zusammenrücken, wie es wirklich in Fig. 1 Taf. IX zu sehen ist. In jedem einzelnen Fall hängt dies von der Abstufung der Indices und von der Krümmung der Grenzflächen der einzelnen Schichten ab. Ob bei den thierischen Linsen ein Streben nach gleichzeitiger Verminderung der Aberration schiefer Bündel erkennbar ist und ob eine solche Verminderung überhaupt erstrebenswerth war, soll später untersucht werden.

Bestimmter lässt sich über den zweiten Punkt, die Astigmasie, urtheilen. Für jedes einzelne dünne Bündel, für jeden einzelnen Strahl verhält sich die geschichtete Linse mit kugeligen Flächen mit verschiedenen Indices wie eine Reihe verschiedener Medien mit kugeligen Grenzflächen. An jeder derselben muss astigmatische Brechung erfolgen. Die Brennstrecken der einzelnen Strahlen können somit durch Schichtung nicht verkürzt werden, im Gegentheil muss diejenige des Centralstrahles, wegen der Annäherung der geschichteten Linse an die flache, verlängert erscheinen. Die Astigmasie wird durch die Schichtung nicht im günstigen Sinne beeinflusst. Das Brenngebilde kann somit vielleicht die Form, Taf. VI Fig. 6, annehmen, die Astigmasie muss aber stets vorhanden sein, homocentrische Brechung kann nicht Platz greifen. Gleichzeitige Correction von Aberration und Astigmasie durch Schichtung ist, wie schon oben bemerkt, nur möglich, wenn die Medien radiär zu der jedesmaligen Axe des Bündels angeordnet sind. Im thierischen Auge nimmt diese Anordnung schon die paraxiale Brechung in Anspruch, so dass über dieselbe für Nebenaxen nicht mehr verfügt werden kann.

Beseitigung der Astigmasie wäre noch durch Aenderung der Flächenkrümmung erreichbar. An der Fläche des Rotationsellipsoids und des Rotationskörpers der Curven vierten Grades haben wir homocentrische Strahlen kennen gelernt. Die Annahme, homocentrische stigmatische Brechung schiefer Strahlenbündel könne dadurch erreicht sein, dass die Linsenflächen Flächen von nicht sphärischen Rotationskörpern, (um Nebenaxen), sein könnten, wird durch die Ueberlegung ausgeschlossen, dass auch für schiefe Bündel der in der Mitte der Pupille eintretende Strahl der wichtigste ist und dass der Linsenscheitel in den einzelnen Meridianen keine (irgendwie erheblich) verschiedene Krümmung haben darf, wenn nicht das centrale Sehen Schaden erleiden soll. Eine Verminderung der Astigmasie für schiefe Strahlenbündel im thierischen Auge durch Schichtung oder andere Massnahmen ist also keineswegs ersichtlich, vielmehr sehr unwahrscheinlich. Genauere Resultate werden wir noch erreichen, nachdem im folgenden Abschnitte die durch experimentelle Untersuchungen an Thierlinsen gewonnenen Ergebnisse besprochen und dadurch thatsächliche Grundlagen für das optische Verhalten derselben festgestellt sind.

19. Experimentelle Untersuchungen an thierischen Linsen.

Schon in meinen früheren Arbeiten habe ich zuerst experimentell nachgewiesen, dass die von anderer Seite ausgesprochene Vermuthung, der Bau der thierischen Linse sei auf vollständig homocentrische Brechung auch der schief auffallenden Strahlenbündel berechnet, nicht richtig ist, dass vielmehr bei Rinds-

und Schweinslinsen eine erhebliche astigmatische Brechung stattfindet, anscheinend ebenso bedeutend, wie bei der entsprechenden homogenen Linse.

Damals beschränkte ich mich absichtlich auf die Widerlegung jener Behauptung, weil meine Versuche, eine exakte Vergleichung der thierischen mit der homogenen Linse auszuführen, auf sehr grosse, zum Theil, wie es schien, unüberwindliche Schwierigkeiten stiessen.

Die hauptsächliche Fehlerquelle liegt in der erforderlichen Centrirung der zu untersuchenden Linsen, welche mit Sicherheit nicht auszuführen ist. Die Linse mit möglichster Genauigkeit nach dem Augenmass zu centriren, genügt keineswegs, um auf ganze Millimeter ablesen zu können, geschweige denn auf zwei bis drei Decimalstellen. Die aus dieser Quelle stammenden Fehler sind so bedeutend, dass sie alle, an anderen Punkten erstrebte, Exaktheit ganz illusorisch machen. Um dies einleuchtend erscheinen zu lassen, muss ich vorwegnehmen, was wir genauer erst im weiteren Verlauf kennen lernen werden. In der homogenen Linse erfahren die Strahlenbündel, wie wir oben sahen, eine astigmatische Brechung sehr verschiedenen Grades, je nachdem sie durch den optischen Mittelpunkt oder andere Theile der Linse gehen, und zwar ist diese Verschiedenheit bei jeder Linsenform wiederum eine besondere und charakteristische.

Ungemein viel grösser ist die Verschiedenheit aber noch an den thierischen Linsen. Diesen wichtigen Satz werde ich später ausführlich begründen. Hier steht er wegen der aus demselben sich ergebenden Folgerung bezüglich der Untersuchungsmethode. Es ist unmöglich, eine bestimmte berechnete Strahlengattung mit der entsprechenden experimentell gemessenen zu vergleichen, denn es existirt gar keine Garantie, ob man wirklich die gewünschte oder eine um ein Weniges abweichend verlaufende vor sich hat.

Wir nehmen wiederum im Folgenden an, ein Bündel paralleler von einem unendlich entfernten, um eine gewisse Anzahl Grade seitlich der Axe gelegenen, Leuchtpunkte herkommender Strahlen falle auf die ganze Vorderfläche der Linse. Von diesen Strahlen wählen wir die vier schon früher charakterisirten behufs näherer Untersuchung aus. Die Strahlen sind:

I. Centralstrahl durch den optischen Mittelpunkt,

II. Radialstrahl durch den Krümmungsmittelpunkt der Hinterfläche, nach der ersten Brechung,

III. Scheitelstrahl durch den Scheitelpunkt der Vorderfläche,

IV. Lateralstrahl durch einen 0·5 mm vor dem Scheitel gelegenen Axenpunkt gehend.

Unter diesen Strahlen sind immer unendlich dünne Bündel zu verstehen. Berechnet man nun z. B. den Scheitelstrahl der homogenen idealen Schweinslinse, misst aber an der wirklichen Schweinslinse den unmittelbar daneben verlaufenden, noch nicht 1 mm vom Scheitel entfernt an der Vorderfläche eingetretenen Radialstrahl, so wird man die Brennstrecke an der thierischen Linse kürzer finden als an der homogenen. Das Resultat ist jedoch falsch, weil nicht die entsprechenden Strahlen zur Vergleichung kamen. Da es mir von vornherein ganz unmöglich erschien, die Centrirung der Linse so genau herzustellen, um die Behauptung wagen zu dürfen, der augenblicklich untersuchte Strahl sei am Scheitel oder einen Millimeter davon entfernt an der Vorderfläche eingetreten, so habe ich weiter keine Mühe mit diesem Verfahren verloren. Das folgende genügt dagegen allen berechtigten Anforderungen.

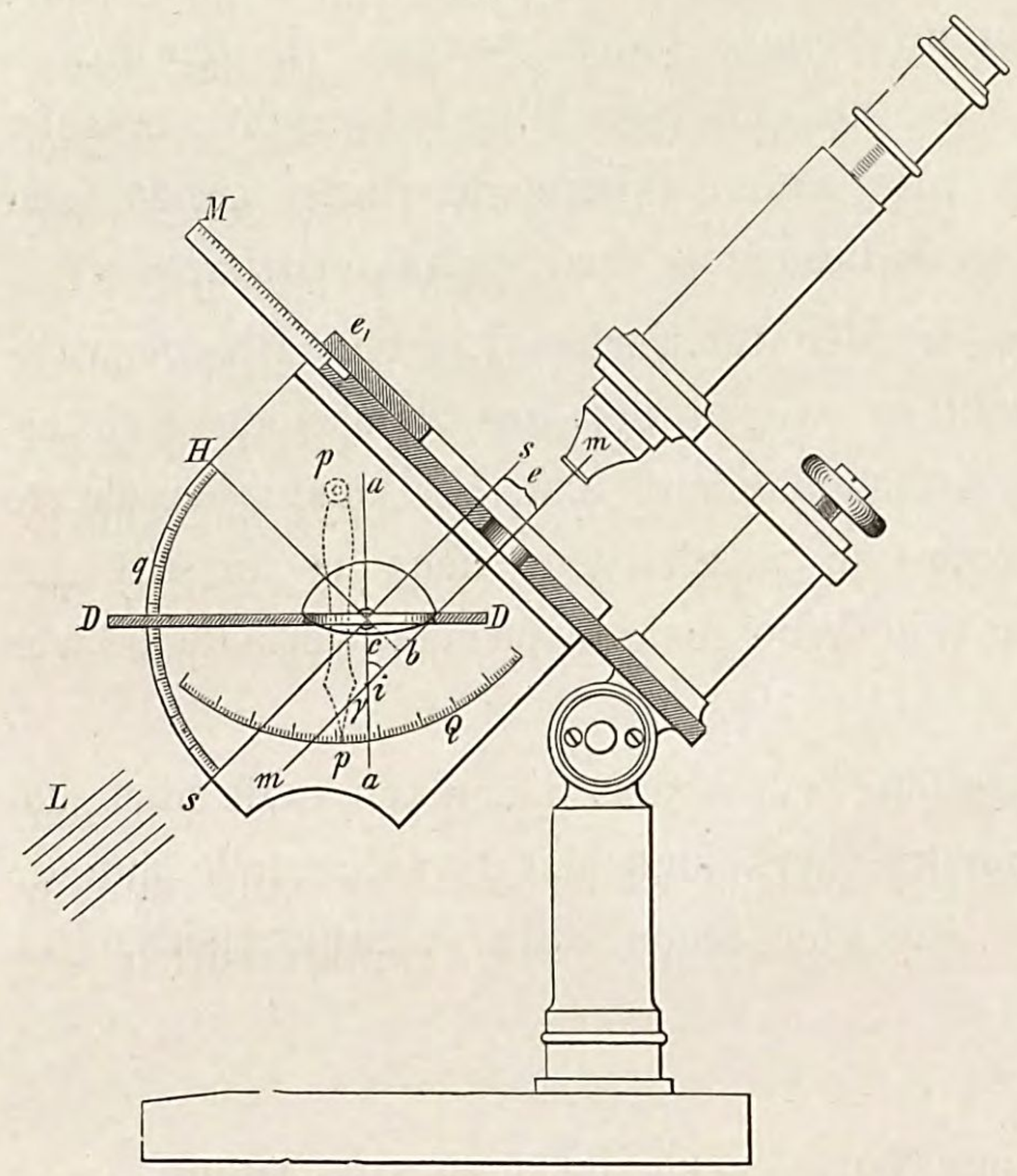
Von einem auf die ganze Vorderfläche der thierischen Linse auffallenden Bündel paralleler Strahlen sind möglichst viele gebrochene Strahlen zu bestimmen und an allen die Lage der Brennlinien zu messen, so dass man ein Bild der gesammten Brechung erhält und das Anwachsen und Abnehmen der Brennstrecke mit der Richtung der austretenden Strahlen verfolgen kann. Mit diesem Gesammtbilde ist dann ein ähnliches von der entsprechenden homogenen Linse durch Rechnung erhaltenes zu vergleichen. Der durch mangelhafte Centrirung bedingte Fehler verliert hier augenscheinlich seine Bedeutung. Wie oben bemerkt, ist die Brechung auch in den homogenen Linsen für jede Strahlengattung verschieden. Und zwar wird in der einen Linse die eine, in der anderen eine andere Strahlengattung günstiger oder ungünstiger gebrochen.

Das Verhältniss der Brennstrecken längs den verschiedenen Strahlen zu einander bezüglich ihrer Länge ist für jede Linsenform charakteristisch. Gelingt es uns nun, an den thierischen Linsen dieses Verhältniss zu ermitteln, so können wir feststellen, ob es dasselbe ist wie bei der betreffenden homogenen Linse oder nicht, und im letzteren Falle, welcher Linsenform es eher zugehörig erscheinen könnte.

Beschreibung des Apparates.

Zu meinen Versuchen benutzte ich den in Fig. 22 abgebildeten Apparat. Derselbe steht auf einer horizontalen Platte, 2·43 m über dem Fussboden. Die Lichtstrahlen L kommen von einem in horizontaler Richtung 6 m entfernten, 0·33 m über dem Boden befindlichen Leuchtpunkte von 8 mm Durchmesser her.

Fig. 22.



Der Winkel, welchen die Lichtstrahlen im Centrum der Linse c mit der Senkrechten bilden, betrug somit 70⁰. Ausserdem war noch eine nähere Marke, 2·10 m vom Fusspunkte der durch den Apparat gehenden Senkrechten, auf dem Boden angebracht. Befand sich die Lichtquelle über derselben, so war der Winkel zwischen Strahlen und Loth im Centrum der Linse c = 45⁰.

An dem Objekttische eines umlegbaren Mikroskops ist ein nach vorn und hinten verschiebbares Gehäuse angebracht. Die Verschiebung ist an dem Maassstab M in Viertelmillimetern abzulesen. Um eine Axe, welche horizontal quer von der rechten zur linken Wand des Gehäuses läuft und in der Figur zum Punkte c verkürzt erscheint, ist das Diaphragma DD drehbar. Die Grade der Drehung werden am Quadranten q abgelesen.

Sobald die Drehungsaxe c sich in der Mittellinie des Tubus mm befindet, steht das Gehäuse e_1 auf dem Punkte 0 des Massstabs. Im Ocular des Mikroskops giebt ein Faden die Mittellinie an.

In das Diaphragma lassen sich Rahmen mit verschieden grossen Oeffnungen einfügen, im Durchmesser von 9 mm für Schweinslinsen, von 17 mm für Rindslinsen. Die Ränder der Oeffnungen sind gekehlt und abgerundet. Ausserdem kann ein Rahmen angebracht werden, auf welchem die Linse, noch vermittelst ihrer Aufhängebänder mit der Sclera verbunden, befestigt wird durch Anheften der Sclera mit Nadeln. Am Tubus des Mikroskops befindet sich eine Scala, deren Nullpunkt der Einstellung auf den Ort der Axe c entspricht. Man liest halbe Millimeter ab und kann Viertelmillimeter mit Sicherheit schätzen.

Mit dem Apparat lassen sich leicht Untersuchungen unter allen beliebigen Ein- und Austrittswinkeln anstellen. Es sind alle Daten gegeben, um den Punkt, auf welchem der Tubus eingestellt ist, in Bezug zur Mitte der Drehungsaxe c festzulegen. Die an der Scala des Tubus am Massstabe M und am Quadranten q gefundenen Zahlen können sofort in eine Zeichnung übertragen werden, oder man kann auch den Punkt i der Axe berechnen, von welchem der austretende Strahl scheinbar herkommt. Wir nennen diese Punkte die Axenpunkte der betreffenden Strahlen. Die Entfernung desselben von c ist nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, $ic = \mp e : \sin\gamma$, gleich der Verschiebung des Gehäuses abgelesen am Massstab M, dividirt durch den Sinus des Winkels $\gamma = Dch$, abgelesen am Quadranten q. Ausserdem ist noch die Entfernung des hinteren Linsenpols von der Drehungsaxe, bei Einstellung des Massstabes M auf 0, und die Dicke der Linse zu messen, dann hat man die nöthigen Angaben im Besitz, um den Gang der Strahlen construiren zu können.

Die Abweichung der Mittellinie des Tubus von der Senkrechten wird am Quadranten Q abgelesen. Man misst die Lage der Brennlinien durch Einstellungen des Tubus auf denselben und die Hinterfläche der Linse.

Die grösste Schwierigkeit liegt darin, die Linse gut centrirt einzuschalten. Dieselbe wird, selbstverständlich mit der grössten Vorsicht, sammt Zonula, Ciliarkörper vorderem Theil der Chorioidea und Iris aus dem Auge genommen. Dabei verengt sich die Pupille. Will man bei der Rindslinse Centralstrahlen untersuchen, so muss man die Iris nach vorn zu entfernen, weil sonst die betreffenden eintretenden Strahlen abgeblendet werden. Bei Schweinslinsen ist die Entfernung der Iris nur für Centralstrahlen von 70⁰ nothwendig. Man legt die Linse, die nur an der Zonula gehalten werden darf, auf das Diaphragma, möglichst mit ihrer Aequatorialebene demselben parallel und breitet Zonula und Ciliarkörper auf dem Diaphragma aus, damit die Linse weniger leicht verrutschen kann. Ausserdem befestigt man Zonula und Ciliarkörper mit Klemmpincetten. Die Linse selbst muss locker liegen. Die ganze Einrichtung, besonders die hohe Aufstellung des Apparat ist so gewählt, damit die Linse möglichst wenig aus der horizontalen Lage gebracht zu werden braucht, und schon vermöge der eigenen Schwere in ihrer Lage verharrt.

Da es immerhin denkbar gewesen wäre, dass die Krümmung der mit ihren Rändern aufliegenden Vorderfläche, obgleich der Aequatorialrand der Linse das Diaphragma kaum berührt, vielmehr nur der Ciliarkörper auf demselben ruht und obendrein die Linsenfläche noch durch die Iris geschützt wird, sich ändern könnte, so wurde noch in folgender Weise verfahren. Zuerst trägt man die Hornhaut ab, darauf halbirt man den Bulbus längs des Aequators und löst den Glaskörper aus der vorderen Hälfte. Darauf legt man diese mit der Hinterfläche der Linse auf den Glaskörper und trennt rings die Iris ab. Nun macht man vier Meridionalschnitte vom Aequatorialrande der Sclera bis zum Limbus. Vermittelst feiner Nadeln werden die vier Sclerallappen auf dem erwähnten Rahmen befestigt. Dieser ist auf dem Diaphragma verschiebbar und kann in sich selbst verengert oder erweitert werden, so dass die Spannung der Zonula eine mehr weniger straffe ist. Die Linse hängt frei an ihren natürlichen Aufhängebändern. Die Resultate beider Methoden weichen nicht von einander ab, so dass eine Krümmungsänderung auch bei der zuerst beschriebenen als ausgeschlossen betrachtet werden darf. Die zweite Methode macht es schwieriger genaue Centrirung und feste Fixation zu erhalten.

Das Augenmass genügt hinsichtlich der Centrirung nicht, um auch nur halbwegs exacte Resultate zu erhalten. Man muss vielmehr die Lage der Linse durch den Gang des Lichtes selbst controlliren. Zunächst überzeugt man sich, ob die Brennlinien schiefer Strahlen genau senkrecht und horizontal liegen. Dann wird ein Leuchtpunkt unterhalb der Linse an der vorher erwähnten zweiten Marke angebracht und die Mittellinie des Tubus genau auf denselben gerichtet, nachdem die Einstellungen am Massstab M und Quadranten q auf den Nullpunkt gebracht sind; nur der Quadrant Q zeigt eine Abweichung des Tubus von der Vertikalen um 45^0 an. Das durch die Linse entworfene Bild muss in der Mittellinie des Tubus liegen, ebenso der hintere Linsenpol. (Nebenbei sei bemerkt, dass hier gleichzeitig die hintere Brennweite und der Ort des hinteren Pols bestimmt wird.) Etwaige Abweichungen sind zu corrigiren durch leise Verschiebungen der Linse vermittelst der Iris oder durch Verschiebungen des ganzen Rahmens. Gelingt die Centrirung auf diese Weise nicht bald, so muss man die Linse verloren geben, da öfteres Verschieben von derselben nicht vertragen wird.

Gegen Schluss der Versuche hat man noch einmal zu prüfen, ob die Lage der Linse auch dieselbe geblieben ist während der ganzen Reihe. Dann legt man die Linse auf eine Glasplatte, diese auf den Objecttisch und bestimmt die Dicke, indem man Glasplatte und hinteren Linsenpol mit einigen Stäubchen Calomel bestreut, den Tubus nacheinander auf beide einstellt und die Differenz anmerkt. Die Brauchbarkeit der Linsen dauert sehr verschiedene Zeit. Manche kann man eine Stunde lang benutzen, ohne dass sich ihre Brechkraft verändert, vielmehr die Lage der Brennlinien zuletzt noch genau dieselbe ist wie anfangs. Andere Linsen trüben sich sehr rasch. Viele beschlagen aussen, bei den meisten tritt zuerst Kerntrübung ein. Der Beginn derselben äussert sich früher durch Aenderung der Lichtbrechung, als er mit blossem Auge zu sehen ist. Ich habe Irrigation der Linsen mit $^1/_2\,^0/_0$ Kochsalzlösung versucht, habe davon aber Abstand genommen, da die anhaftende Flüssigkeitsschicht keineswegs immer parallele Flächen aufweist und öfters die entworfenen Bilder beeinträchtigte. Es war sogar nothwendig, zufällig an der Unterfläche haftende Tropfen vorsichtig zu entfernen. Die Irrigation ist auch nicht nöthig, da gut behandelte Linsen sich in der Regel genügend lange Zeit halten.

Gegen einen Einfluss des Absterbens der Linse und die etwaigen daraus entspringenden Veränderungen der Brechkraft, sichert man sich dadurch, dass man die ersten Messungen am Schlusse wiederholt. Das Ergebniss muss das gleiche sein. Messungen, wo diese Bedingung nicht zutrifft, dürfen nicht benutzt werden. Die Einstellung auf die Brennlinien ist genauer ausführbar als die auf die Hinterfläche. Künstlich markiren etwa durch Calomelstäubchen darf man dieselbe nicht, weil man dadurch die Brauchbarkeit der Linse für weitere Versuche beeinträchtigt. Wir müssen uns also an natürliche oder an zufällig vorhandene Merkmittel halten, um den Moment der genauen Einstellung auf die Hinterfläche zu bestimmen, es sind dies das Deutlichwerden der Linsenfasern, von Körnern unter der Kapsel, zufällig auf der letzteren liegende Stäubchen u. s. w. Weil man unter sehr verschiedenen Winkeln auf die Hinterfläche aufsieht, so erscheint bald nur das eine bald nur das andere dieser Kennzeichen deutlich und daher bleibt die Bestimmung des Ortes der Hinterfläche ungleichmässiger und unsicherer als die übrigen Messungen, wenn auch die Fehlergrenzen keine sehr erheblichen sind.

Den Zeichnungen Taf. II Fig. 3 und Taf. III Fig. 1 sind die Dimensionen und Indices zweier kleinen Glaslinsen zu Grunde gelegt, es war somit die Gelegenheit geboten durch Vergleichung von Messung und Berechnung die praktische Leistungsfähigkeit obiger Methode zu erproben. Die Messungen an den Glaslinsen wurden in möglichst ähnlicher Weise ausgeführt, wie dies bei den thierischen Augen geschehen war. Die Linsen wurden in Wachs eingebettet, auf dem Diaphragma befestigt, die Centrirung geschah nach dem Augenmass und unter Benutzung des centralen Bildes, wie oben beschrieben. Auch die zur Handhabung der Linsen verwandte Zeit überstieg nicht die bei thierischen Linsen nöthige. Zwei Reihen von Messungen an jeder Linse sind in den Tabellen aufgeführt, die Lage der Brennlinien des 70^0, 60^0 und 50^0 Bündels nach der Brechung in der Biconvexlinse auch in der Fig. 2 Taf. III dargestellt. Die Uebereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist eine ausgesprochene und für unseren Zweck mehr als genügende, weil, wie wir sehen werden, die charakteristischen Eigenthümlichkeiten der Brechung in den thierischen Linsen sehr stark hervortreten.

Tabelle XIII.

Symmetrische homogene biconvexe Glaslinse.
n = 1·55 r = 8·5 d = 3 f = 7·21

λ	λ₁	Gemessen Nr. 1 I	II	B	Versch.	Gemessen Nr. 2 I	II	B	Berechnet I	II	B	
70]	80	0·6	4·8	4·2								
	70	1·1	4·6	3·5	+ 1·06	1·5	5	3·5	1	4·6	3·6	(Central)
	60	2	5	3								
	50	2·5	5	2·3								(Scheitel)
	40	3	5	2	— 2·2	2·5	4·8	2·3	2·1	4·6	2·5	(37° 19)
	30	3	4·5	1·7	— 4·4	2·5	4·5	2	2·6	4·4	1·8	(23°)
60]	70	0·5	5	4·5								(Radial)
	60	2	5·2	3·2	+ 0·7	2	5	3·5	1·8	5·2	3·4	(Central)
	50	3	5·7	2·7								
	40	3·5	6·0	2·5								(Scheitel)
	30	3	5·2	2·2	— 4·4	2·9	5·2	2·3	2·9	5·3	2·4	(33° 58)
	20	2	4	2	— 9·4	2·5	4·5	2	3·1	5·0	1·9	(22° 21)
50]	60	1	5·3	4·3								(Radial)
	50	3	5·9	2·9	+ 0·55	3	6	3	2·9	5·8	2·9	(Central)
	40	4	6	2								(Scheitel)
	30	4	6	2					3·8	5·8	2	(29° 37)
	20	3·5	5·5	2	— 9	4	6	2	3·9	5·6	1·7	(20° 47)
	10	2·7	5	2·3	— 23	3	5	2				(Radial)
	0	1	3·5	2·5								
40]	40	4	6·2	2·2	+ 0·4	4	6	2	4·1	6·3	2·2	
30]	30	5	6·8	1·8	+ 0·2	5	6·5	1·5	5·3	6·7	1·4	
20]	20	6	7	1					6·3	7	0·7	
10]	10		7						7	7·2	0·2	
0]	0		7·2				7·1			7·21		

Planconvexe Glaslinse. Concave Fläche.
n = 1·55 r = ∞ ϱ = 6 d = 2 f = 10·91

λ	λ₁	Gemessen Nr. 1 I	II	B	Versch.	Gemessen Nr. 2 I	II	B	Berechnet I	II	B	
70]	70	1	7	6	+ 3·2	1	7	6	0·8	6·7	5·9	(Central)
	60	3·8	7·8	4								(Scheitel)
	50	7·7	10·7	3					5·7	9·4	3·7	(52° 16)
	40		11	0	— 2·3		10·8	0	10·91	10·91	0·0	(37° 19)
	30		11	0								(Radial)
60]	70	1	6·5	5·5								
	60	2·5	7·5	5	+ 3·1	2	8	6	1·9	7·6	5·7	(Central)
	50	6	10	4								
	40		11	0								(Radial)
	30		11	0	— 6		10·5	0	10·91	10·91	0	(33° 58)
50]	50	4	8	4	+ 3·0	4·5	9	4·5	3·5	8·5	5	(Central)
	20				— 11		10·5	0	10·91	10·91	0	(29° 37)
												(Radial)
40]	40	6	8·5	2·5	+ 2·8	6	10	4	5·5	9·3	3·8	
30]	30	7·5	9	1·5		8	10	2	7·5	10	2·5	
20]	20		10						9·3	10·5	1·2	
10]	10		11						10·5	10·8	0·3	
0]	0		11							10·91		

Wir erläutern zuerst die in den Tabellen aufgeführten Werthe der Rindslinsen No. 8. 9. 10 und der Schweinslinsen No. 3. 6. 12, deren Resultate auf den Tafeln VII und VIII dargestellt sind.

Die in den Tabellen enthaltenen Zahlen fixiren jeden austretenden Strahl in seiner Lage zur Axe und zu dem auf derselben gelegenen Drehpunkte, auf jedem Strahl wiederum die Oerter der Hinterfläche, der ersten und zweiten Brennlinie. Wir erhalten für jeden derselben zwei Ordinaten; die erste drückt die Verschiebung des austretenden Strahles durch das vom Drehpunkt auf denselben gefällte Perpendikel aus, die zweite die Entfernung vom Fusspunkt des letzteren ab längs jenes Strahles. Wir nehmen also einen Punkt D als Drehpunkt an, ziehen durch denselben eine Linie unter einem Winkel gleich dem Winkel H c D (Fig. 22) — derselbe ist jedesmal der Complementwinkel des im ersten Stabe der Tabellen aufgeführten Winkels —, um welchen die Axe a a von der Linie s s abweicht; letztere Linie ist parallel der Mittellinie des Tubus. Die gezogene Linie entspricht der Linie H b der Figur 22. Auf derselben tragen wir die an der Scala M abgelesene Verschiebung (zweiter Stab der Tabellen) vom Drehpunkt aus ab und errichten eine Senkrechte, welche den austretenden Strahl b m darstellt. Auf diesem Strahl b m trägt man von b aus die Entfernungen der Hinterfläche (in der Tafel ein kleiner Querstrich), der ersten Brennlinie (Punkt), der zweiten Brennlinie (Querstrich) ab. Die Brennstrecke zwischen den beiden Brennlinien ist auf der Tafel durch Verdickung der Linien kenntlich. Ausserdem wird der Ort der Hinterfläche in der Axe, der des hinteren Hauptbrennpunktes, sowie der der Vorderfläche entsprechend den Messungen eingezeichnet und endlich die Conturen der schematischen Linse im Anschluss an diese Punkte hinzugefügt.

Die Nummern 8. 9. 10 der Tabellen der Rindslinse enthalten die Messungsergebnisse der Rindslinsen, welche in Tafel VII Fig. 1, Fig. 2 und Fig. 3 als Beispiel zur Darstellung gekommen sind.

Auf einer beliebigen Linie SF ist der Punkt D als Drehpunkt angenommen. Durch diesen Punkt zieht man Linien unter Winkeln von 90°—70°, 90°—60° u. s. w. Auf der Linie, welche einen Winkel von 90°—70° mit der Axe bildet, trägt man die im Stabe der Verschiebung stehende Millimeterzahl, in Fig. 1 (No. 8) + 3·6, ab (die Tafel giebt 10malige Vergrösserung), und erhält so den Fusspunkt des Strahles. Die in demselben errichtete Senkrechte ist der austretende Strahl, welcher einen Winkel von 70° mit der Axe bildet und dessen Elemente in der ersten Reihe der No. 8 enthalten sind. Auf demselben trägt man nun vom Fusspunkt aus in der Entfernung von 8·2 cm die Hinterfläche, Strichelchen, von 8·7 die erste stehende Brennlinie, Punkt, von 15·7 die zweite liegende Brennlinie, Strich, ab. Die zwischen beiden liegende Brennstrecke wird durch Verdickung der Linie hervorgehoben. Das Gleiche geschieht bei den übrigen Strahlen, doch so, dass die durch entgegengesetzte Vorzeichen kenntlich gemachten Verschiebungen nach entgegengesetzten Richtungen von D aus abgetragen werden. Ein vergleichender Blick auf Fig. 22 macht das Verfahren leicht verständlich. Schliesslich markirt man auf der Axe noch 8·6 cm von D die Hinterfläche, 17·6 cm von D den Hauptbrennpunkt F, und ergänzt das Bild durch Einzeichnung der Conturen der idealen homogenen Rindslinse. Es dürfte unmöglich sein, an derselben Linse, an welcher die Brechung gemessen wurde, auch noch die Krümmungsradien der Vorderfläche und Hinterfläche festzustellen. Die Fehler, welche man durch das Zurückgreifen auf die Conturen der idealen Linse begeht, sind unzweifelhaft gering und halten sich innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Der Axendurchmesser der Rindslinse No. 8 wurde auf 11·7 mm statt der 12 der idealen bestimmt, — der Scheitel hätte also eine etwas andere Lage bekommen sollen, — die hintere Brennweite auf 9 statt 9·171, in welcher Entfernung der Hauptbrennpunkt F_0 der idealen Linse von der Hinterfläche liegt. Die von der homogenen Linse entlehnte Hinterflächencontur fällt übrigens ziemlich genau, wie ersichtlich, mit den gemessenen Oertern derselben an den einzelnen Strahlen zusammen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass wir eine 10malige Vergrösserung vor uns haben.

Die Verbindungslinie der ersten Brennlinien ist die äussere Caustica, die der zweiten die innere Caustica.

In gleicher Weise enthalten die Nummern 3. 6 und 12 der Tabellen (Schweinslinse) die Zahlenwerthe der auf Tafel VIII dargestellten Schweinslinsen. Um die Verhältnisse direkt mit denen der Rindslinse vergleichbar zu machen, wurde eine 20malige Vergrösserung gewählt. Die Zahl, welche den Winkel des einfallenden Bündels mit der Axe angiebt, steht jedesmal neben der zweiten Brennlinie des Centralstrahles, welcher in der Richtung des einfallenden Bündels austritt.

Eine Vergleichung mit den auf Tafel IV und V dargestellten homogenen Linsen lässt sofort folgende charakteristischen Differenzpunkte ins Auge fallen.

I. Die Centralstrahlen der wirklichen Linse zielen nach einem der Axenmitte viel näher gelegenen Punkte als bei der homogenen Linse.

II. Die Brennstrecke längs den Centralstrahlen ist in der wirklichen Linse noch einmal so lang wie an der homogenen.

III. Die ersten (stehenden) Brennlinien liegen an der wirklichen Linse weiter auseinander als bei der homogenen, d. h. die äussere Caustica ist länger.

Wir wollen zunächst die in den übrigen Tabellen mitgetheilten Messungen auf diese Differenzpunkte hin prüfen. Die Entfernung der Axenpunkte der Centralstrahlen von der Hinterfläche beträgt an der:

	Rindslinse:				Schweinslinse:		
	Gemessen (Mittel)	Berechnet	Differenz		Gemessen (Mittel)	Berechnet	Differenz
70	4·65	3·047	1·603	70	3·5	1·92	1·58
60	4·5	3·208	1·292	60	3·3	2·004	1·296
50	4·45	3·349	1·101	50	3·1	2·07	1·03

Unter Berechnet stehen die Zahlen der idealen homogenen Linse. Die Axenpunkte sind der Axenmitte erheblich näher gerückt, und ausserdem ist ihre Reihenfolge vertauscht.

Das Hereinrücken der Axenpunkte ist bei der Schweinslinse verhältnissmässig noch bedeutender, als bei der Rindslinse, die Strahlen scheinen von der anatomischen Mitte der Linse herzukommen. An beiden wirklichen Linsen fehlt die Kreuzung der verlängerten Centralstrahlen, bevor sie die Axe erreichen, welche an den homogenen Linsen vorhanden ist.

Hinsichtlich des zweiten Punktes ist zu bemerken, dass die Verlängerung der Brennstrecke um fast das Doppelte ausnahmslos bei allen Messungen hervortritt. Es bestätigt somit der Versuch die oben abgeleitete Behauptung, dass durch Schichtung die Astigmasie nicht vermindert werden könne. Für die Schweinslinse wurde noch zur Feststellung dieses Punktes eine besondere Reihe von Messungen, zweite Tabelle, ausgeführt. An den Radialstrahlen sind die Brennstrecken für homogene und geschichtete Linsen gleich lang; kürzere Brennstrecken als die homogene Linse hat die zusammengesetzte Linse an keinem Strahle aufzuweisen.

Hinsichtlich des dritten Punktes erinnere ich an das Seite 20 über die Caustica secundaria als Evolvente und die Caustica externa als Evolute Gesagte. Wir sahen, dass die sphärische Aberration um so stärker ist, je länger die Caustica externa ist, d. h. je weiter die einzelnen Krümmungsmittelpunkte der Caustica secundaria auseinander liegen. Bei der wirklichen Linse liegen diese Krümmungsmittelpunkte entschieden weiter auseinander, und daraus ergiebt sich der Schluss, dass an der wirklichen Linse die sphärische Aberration für schräge Strahlenbündel grösser ist als an der homogenen Linse. Auf die schlankere Form des Brenngebildes in den geschichteten Linsen gegenüber der breiteren in den homogenen werden wir unten näher eingehen.

In beifolgender Tabelle XIV sind die durch Rechnung und Messung an Rinds- und Schweinslinse für die Lage der Brennstrecken ermittelten Werthe zusammengestellt, wobei die Zahlen der Schweinslinse verdoppelt wurden, um die direkte Vergleichung zu erleichtern. Das Verhältniss der wirklichen Linsen zu den idealen homogenen ist für Schwein und Rind ein vollkommen analoges. Wir sehen bei beiden die Brennstrecke an den Centralstrahlen auf das Doppelte verlängert, von 3·2 auf 6·2 und 6·6, von 2·7 und 2·6 auf 5·1 und 5·2, von 2·1 und 2·2 auf 3·3 und 3·2. Dies geschieht dadurch, dass bei der wirklichen Linse die erste (stehende) Brennlinie der Hinterfläche der Linse sich nähert, während die zweite (liegende) in derselben Entfernung bleibt wie bei der homogenen Linse.

Im Gegensatz dazu besteht hinsichtlich der Radialstrahlen zwischen wirklichen und homogenen Linsen nur ein geringfügiger Unterschied; für die Rindslinse ist er geradezu gleich Null; bei der Schweinslinse ist für 70° die Brennstrecke an der wirklichen Linse etwas länger, für 60° und 50° dagegen etwas kürzer als an der homogenen Linse.

Die charakteristische Differenz besteht somit darin, dass an den homogenen idealen Linsen die Brennstrecken der Centralstrahlen und Radialstrahlen ziemlich gleich lang sind, — an den wirklichen Linsen die Brennstrecken der Radialstrahlen nahezu dieselbe Lage und Länge wie bei der homogenen Linse haben, die Brennstrecken der Centralstrahlen dagegen um das Doppelte verlängert erscheinen, und zwar dadurch, dass die erste Brennlinie der Hinterwand näher rückt.

Dieses Verhältniss der Brennstrecken an Central- und Radialstrahlen zu einander, welches die wirklichen Linsen abweichend von den homogenen zeigen, ist aber dasjenige, welches wir als das für flache Linsen charakteristische erkannt haben.

Die wirklichen Thierlinsen stehen somit hinsichtlich ihres Brechungsvermögens den flachen Linsen näher.

Die ganze Brennfigur schiebt sich in Folge des Vorrückens der Axenpunkte mehr gegen den Linsenaequator hin, wie dies aus den Tafeln ersichtlich ist. Daher bilden die nach bestimmten Axenpunkten, z. B. dem Krümmungsmittelpunkt der Hinterfläche C und dem Scheitel S zielenden austretenden Strahlen nicht dieselben Winkel mit der Axe wie an der homogenen Linse.

Auch dieses Verhalten deutet wiederum darauf hin, dass die wirklichen Linsen durch ihre innere Structur den flachen Linsen ähnlicher geworden sind.

Tabelle XIV.

Homogene ideale Rindslinse
$n = 1 \cdot 54$, $r = 14$, $\varrho = 10$,
$d = 12$, $f = 9 \cdot 171$.

Homogene ideale Schweinslinse.
$n = 1 \cdot 54$, $r = 7 \cdot 5$, $\varrho = 5 \cdot 5$,
$d = 7$, $f = 4 \cdot 873 \times 2 = 9 \cdot 746$.

		Rindslinse Berechnet			Rindslinse, Mittel aus den Messungen an Thierlinsen				Schweinslinse (mit 2 multiplicirt), Mittel aus den Messungen an Thierlinsen					Schweinslinse Berechnet			
70°		I	II	B		I	II	B		I	II	B		I	II	B	
Central	70°	3·8	7·0	3·2	70°	0·7	6·9	6·2	70	0·6	7·2	6·6		4·4	7·6	3·2	70°
Radial	42° 24	2·9	6·2	3·3	40°	3·0	6·2	3·2	40	2·8	6·8	4·0		2·9	6·6	3·8	44° 27
Scheitel	33° 52	2·2	5·8	3·6	30°	2·0	5·7	3·7	30	0·4	5·4	5·0		1·8	5·9	4·1	32° 20
60°																	
Central	60°	4·8	7·5	2·7	60°	2·2	7·3	5·1	60	2·2	7·4	5·2		5·6	8·2	2·6	60°
Radial	37° 40	4·5	7·0	2·5	40°	4·4	7·0	2·6	40	4·8	7·8	3·0		4·9	7·7	2·8	39° 13
Scheitel	30° 42	3·8	6·7	2·9	30°	3·7	6·6	2·9	30	3·6	6·8	3·2		3·6	6·9	3·3	29° 9
50°																	
Central	50°	5·8	8·0	2·1	50°	4·3	7·6	3·3	50	4·6	7·8	3·2		6·4	8·6	2·2	50°
Radial	32° 21	5·9	7·7	1·8	30°	5·6	7·4	1·8	40	5·0	7·6	2·6					
Scheitel	26° 43	5·3	7·5	2·2					30	6·2	8·2	2·0	Radial	6·4	8·2	1·8	33° 25
Lateral	23° 52	5·1	7·5	2·4	20°	4·3	6·9	2·6	20	5·6	8·6	3·0	Scheitel	5·2	7·8	2·6	25° 35

		Homogene ideale Menschenlinse			(mit 1¼ multiplicirt:)			Homogene biconvexe Glaslinse			(mit 1½ multiplicirt:)			
		I	II	B	I	II	B	I	II	B	I	II	B	
Central	70°	1·5	5·5	4·0	2·0	7·0	5·0	1·5	6·9	5·4	1·0	4·6	3·6	70°
Scheitel	47° 14	3·3	5·9	2·6	4·2	7·3	3·2	3·1	6·9	3·8	2·1	4·6	2·5	51° 46
Radial	33° 40	3·1	5·6	2·5	3·9	7·0	3·1	3·8	6·6	2·8	2·5	4·4	1·9	23°
60°														
Central	60°	2·7	6·2	3·5	3·4	7·8	4·4	2·7	7·8	5·1	1·8	5·2	3·4	60°
Scheitel	43° 22	4·2	6·4	2·2	5·2	8·0	2·8	4·3	7·9	3·6	2·9	5·3	2·4	46° 51
Radial	31° 33	4·1	6·3	2·2	5·1	7·9	2·8	4·6	7·5	2·9	3·1	5·0	1·9	22° 21
50°														
Central	50°	3·7	6·7	3·0	4·6	8·4	3·8	4·3	8·7	4·4	2·9	5·8	2·9	50°
Scheitel	37° 44	5·2	6·9	1·7	6·5	8·6	2·1	5·7	8·7	3·0	3·8	5·8	2·0	40° 41
Radial	28° 19	5·1	6·8	1·7	6·4	8·5	2·1	5·8	8·4	2·6	3·9	5·6	1·7	20° 47

Menschenlinse: $n = 1 \cdot 438$, $r = 10$, $d = 3 \cdot 6$,
$f = 8 \cdot 2075$, $\times 1\frac{1}{4} = 10 \cdot 25$.

Glaslinse: $n = 1 \cdot 55$, $r = 8 \cdot 5$, $d = 3$,
$f = 7 \cdot 21$, $\times 1\frac{1}{2} = 10 \cdot 8$.

In nachstehender Tabelle bedeutet Sz nach dem Scheitel zielende, Cz nach C, Asz nach den Axenpunkten der Scheitelstrahlen der homogenen Linse zielende Strahlen in der wirklichen (W.) und homogenen (H.) Linse.

Rindslinse: λ	Cz W.	Cz H.	Sz W.	Sz H.	Asz W.	Asz H.	Schweinslinse: λ	Cz W.	Cz H.	Sz W.	Sz H.	Asz W.	Asz H.
50°	34°	32°	30°	28°	28°	27°	50°	39°	33½°	33°	29°	30°	25½°
60°	40°	37°	35°	33°	32½°	31°	60°	47°	39½°	39°	34°	34½°	29°
70°	45°	43°	39°	38°	35½°	34°	70°	54°	44½°	44°	38°	39°	32½°

Die Zahlen geben in Graden die Winkel an, welche die austretenden Strahlen in den Punkten C, S und As mit der Axe bilden würden. Die Asz-Strahlen der homogenen Linse sind die Scheitelstrahlen derselben. An der wirklichen Linse sind die Winkel grösser, worin sich die Verschiebung der Brennfiguren gegen den Aequator hin kund giebt. Dieser Umstand erschwert die Vergleichung der wirklichen

und idealen Linse in hohem Masse, weil im Allgemeinen die in beiden Linsen von demselben Axenpunkte scheinbar herkommenden Strahlen nicht gleiche Austrittswinkel, solche dagegen mit gleichen Austrittswinkeln wieder nicht denselben Axenpunkt haben.

In der äusserlich mehr kugeligen Schweinslinse bewirken die flacheren Schichten im Inneren eine grössere Verschiedenheit des Brechvermögens zwischen wirklicher und idealer Linse als in der Rindslinse.

Je weiter wir die Axenpunkte der zu untersuchenden Strahlen nach vorn rücken lassen, desto mehr muss die durch die Verschiebung der Brennfigur nach dem Aequator zu bedingte Differenz der Axenwinkel verschwinden. Sie ist auch wirklich, wenigstens in der Rindslinse, für die nach dem Axenpunkte der Scheitelstrahlen der homogenen Linse zielenden Strahlen kaum noch vorhanden. Da nun die Brennstrecken an den Scheitelstrahlen in idealer und wirklicher Linse gleichweit von der Hinterfläche entfernt sind, ausserdem anzunehmen ist, in der Menschenlinse werde der Einfluss der Schichtung auf die Scheitelstrahlen und die Verschiedenheit der Axenwinkel noch geringer sein — weil ihre Aussenform flacher ist —, als in der Rindslinse, so kommen wir zu dem praktisch wichtigen Resultat, dass die Berechnung der Scheitelstrahlen, unter Benutzung des allgemeinen Totalindex der menschlichen Linse, ohne nennenswerthen Fehler auch auf das Auge angewandt werden darf. Beim menschlichen Auge bilden aber die Scheitelstrahlen die Axe des zur Benutzung kommenden Kegels, während die Centralstrahlen in der Regel durch die Iris abgeblendet werden.

Das Vorrücken der Axenpunkte der Centralstrahlen hat einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf die Gestaltung des Brenngebildes. Das Gesammtstrahlenbündel wird im Querschnitt zusammengedrängt, das Brenngebilde verjüngt und in die Länge gezogen. Ganz besonders muss diese schlanke Form des Brenngebildes sich geltend machen, wenn, wie in der menschlichen Linse, schon die Aussenform flach ist, da in solchen Linsen die Centralstrahlen von vornherein mit viel geringerer Verschiebung verlaufen als in den dickeren Linsen.

Die paraxiale Aberration.

Wir wollen jetzt das von uns entworfene Bild ergänzen durch eine Vergleichung der paraxialen Aberration in der homogenen und wirklichen Linse. Die zugehörige Tabelle der Rindslinse enthält die betreffenden Zahlen, welche auch in der Tafel IX Fig. 2 eingezeichnet sind, in der Weise, dass die der homogenen Linse angehörenden Strahlen ausgezogen, die der wirklichen Linse punktirt sind. Das Messungsverfahren war das gleiche wie bei den schrägen Bündeln. Hinsichtlich der centralen Aberration muss die wirkliche Linse günstiger gestellt sein, da ja die sonst stark aberrirenden Randstrahlen nur schwächer brechende Schichten durchsetzen. Es handelt sich jetzt um parallel der Axe einfallende Bündel. Die einfallenden Strahlen der homogenen Linsen sind nach ihren Einfallswinkeln (mit dem Loth) mit ihren Graden 10° 20° 30° bezeichnet. 1) Der 30°-Strahl wird an der Hinterfläche schon reflektirt und kommt nicht zum Austreten. Der Strahl 4 der wirklichen Linse hat denselben Austrittspunkt wie der vorhergehende, wird aber nicht reflektirt, sondern tritt aus. 2) Der Strahl 20° tritt aus an einem entsprechend zwischen 2 und 3 näher an 2 gelegenen Punkte, die Brennstrecke kommt an Länge aber fast der von 3 gleich und die erste Brennlinie liegt ferner von F, als der Durchschnittspunkt der Strahlen 2 und 3, nämlich i. Hierin lassen sich die günstigeren Aberrationsverhältnisse der thierischen Linse erkennen. Bei der paraxialen Brechung bilden die ersten stehenden Brennlinien 20α, i, 10_{I} (i würde die Brennlinie eines zwischen beiden verlaufenden Bündels sein) die κατ᾽ ἐξοχὴν (Caustica) genannte Linie, während die zweiten Brennlinien mit der Axe zusammenfallen, sobald die brechenden Flächen als Rotationsflächen aufgefasst werden können, die durch Drehung um die optische Axe zu Stande gekommen sind. Sieht man von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern ab, so liegen die zweiten Brennlinien der wirklichen Linse, 11, 22, 33, 44, in der Axe.

Da der Axe parallele Bündel günstiger, 70°-, 60°- und 50°-Bündel aber ungünstiger, mit stärkerer Aberration, gebrochen werden als an der homogenen Linse, so muss es einen Uebergangspunkt geben, ein

dazwischen bei 20° oder 30° verlaufendes Bündel, welches an wirklicher wie homogener Linse gleiche Brechung erleidet. Man verbinde die zweiten Brennlinien der Centralstrahlen mit einander und setze die Curve fort bis F. Nennen wir sie II II-Curve. Eine gleiche (II) Curve denkt man sich durch die ersten Brennlinien gezogen. Diese Curven sind in Taf. IX Fig. 3 und 4 gezeichnet. Ebenso verfahre man mit den Brennlinien der übrigen Strahlen sowohl an der homogenen als an der wirklichen Linse. An der homogenen Linse nähern sich die Curven der Centralstrahlen allmählich einander, bei der wirklichen rückt dagegen die II-Curve sehr schnell auf die II II-Curve zu. In Folge dessen verkürzen sich die Brennstrecken rascher.

	Centralstrahlen				Radialstrahlen			
	Rind		Schwein		Rind		Schwein	
	W.	H.	W.	H.	W.	H.	W.	H.
70	6·2	3·2	6·6	3·2	3·2	3·3	4·0	3·7
60	5·1	2·7	5·2	2·6	2·6	2·5	3·0	2·8
50	3·3	2·1	3·2	2·2	1·8	1·8	2·6	1·8

An den Radialstrahlen erfolgt die Verminderung der Brennstrecken auch allmählich, wie bei der homogenen Linse. Die Curven der ersten Brennlinien nähern sich denen der zweiten, und die Brennlinien nähern sich unter einander. Das Stück der inneren Caustica zwischen den zweiten Brennlinien der Centralstrahlen 70, 60, 50 und denjenigen der Scheitelstrahlen verkürzt sich immer mehr, bis es im Hauptbrennpunkte F punktförmig ist und mit den entsprechenden ersten Brennlinien und dem entsprechenden Stück der Caustica externa zusammenfällt. Der obere Zweig der Caustica externa der schrägen Bündel von der ersten Brennlinie des Scheitelstrahles an entspricht somit der Caustica externa der centralen Aberrationsfigur, $i_1 i_2 i_3$, während das untere Stück der Causticae internae von der Brennlinie des Scheitelstrahles ab mit der Axe FK sich decken würde. Gewissermassen klappt die Caustica interna beim Uebergang in die centrale Brennfigur nach vorn zusammen zu einer einzigen Linie, deren hinteres Ende wieder mit der nach hinten verschobenen Spitze der Caustica externa verschmilzt. Die Linie der Caustica interna kommt so innerhalb der Caustica externa zu liegen.

Vorderfläche.

Endlich bringen die Tabellen Rind und Schwein noch Messungen über die Lage der Brennlinien an der Vorderfläche. Hier sind es, im Gegensatz zur Hinterfläche, die Centralstrahlen, welche den günstigsten Verlauf aufzuweisen haben, während die Radial- und Scheitelstrahlen längere Brennstrecken zeigen.

Brennstrecken	Rind:			Schwein:		
der	70°	60°	50°	70°	60°	50°
Centralstrahlen	3	2·2	1·8	1·65	1·1	1·0
Radialstrahlen	3·8	3	3	2·1	1·4	1·5

Die Nummern 1 und 2 der Tabelle (Vorderfläche) für die Rindslinse geben eine Uebersicht über die Lage der Brennstrecken an den verschiedenen Strahlenarten. Bei No. 3. 4. 5 derselben Tabelle ist der Hauptwerth auf die Bestimmung der Axenpunkte der Centralstrahlen gelegt. Die Entfernungen der Axenpunkte von der Vorderfläche nach hinten betrugen bei der Rindslinse:

	Mittel	Berechnet
70°	4·0	4·6
60°	4·4	4·855
50°	4·5	5·093
40°	5·0	
30°	5·3	

Hier sind die Axenpunkte nicht nach dem Mittelpunkte der Linse, sondern im Gegentheil ein wenig nach dem Scheitel hin verrückt. Auch erscheint die Reihenfolge der Strahlen nicht umgekehrt, wie dies an der Hinterfläche im Vergleich zur homogenen Linse der Fall war. Im Ganzen ist die Abweichung der wirklichen Linse von der

idealen homogenen in Hinsicht auf die Lage der Brennstrecken vor der Vorderfläche eine minimale und dürfte innerhalb des Bereichs der Beobachtungsfehler liegen.

Unsere Messungen erlauben uns nun, die Lage der entsprechenden ein- und austretenden Strahlen festzustellen. Da der an der Vorderfläche austretende 70°-Strahl der einzige ist, welcher denselben Winkel mit der Axe macht, wie das an der Vorderfläche einfallende 70°-Bündel, und andererseits dasselbe vom an der Hinterfläche austretenden 70°-Strahl bezüglich des auf die Vorderfläche auffallenden 70°-Bündels gilt, so müssen die an der Vorder- und Hinterfläche gemessenen Strahlen einander zugehörig sein. In Taf. IX Fig. 3 sind diese Verhältnisse für die Rindslinse dargestellt. Die Centralstrahlen 70°, 60°, 50° der homogenen Linse sind ausgezogen, ihre Axenpunkte mit A. 7. 6. 5 und a. 5. 6. 7 bezeichnet, die Centralstrahlen der wirklichen Linse dagegen punktirt und ihre Axenpunkte mit B. 7. 6. 5 und β. 7. 6. 5 bezeichnet.

	Erste Ordinaten Verschiebung	Zweite Ordinaten Vorderfläche	I. Brennl.	II. Brennl.
70°	+ 3·0	10·6	12·4	15·3
60°	+ 2·4	10·5	13·5	15·7
50°	+ 2·1	10·6	14·2	15·9
0°	+ 0	9·4	16·8	16·8

Aus den Zahlen der Nummern 3, 4 und 5 ist das Mittel gezogen und zur Darstellung der Lage der Brennlinien vor der Vorderfläche benutzt. Der Drehpunkt lag bei 2·2 des Massstabs und, da die Hinterfläche sich im Mittel bei 9·4 befand, 7·2 hinter dem Scheitel der Vorderfläche. Die vordere Brennweite beträgt 7·4 mm. Die Distanzen der vorderen und hinteren Axenpunkte ist geringer als bei den homogenen Linsen.

	Wirkl. L. Gemessen	Homog. L. Berechnet
70°	3·35	4·35
60°	3·1	3·937
50°	3·05	3·558

Die Verringerung dieser Distanzen wird bewirkt durch das Hineinrücken der hinteren Axenpunkte. Dies deutet darauf hin, dass die stärker brechende Kernmasse mehr vorn gelagert ist.

Die Gesammtquerverschiebung der Centralstrahlen ist geringer als in der homogenen Linse. Der Gang derselben innerhalb der Linse ist geradlinig gezeichnet. Thatsächlich würde er die Gestalt einer krummen Linie haben.

An der Schweinslinse finden wir ganz analoge Verhältnisse. Die Nummern 1 bis 4 der Tabelle zeigen die Lage der Brennstrecke an den verschiedenen Strahlenarten, und dass, wie schon oben besprochen, an der Vorderfläche die Centralstrahlen kürzere Brennstrecken als die Radialstrahlen haben. Die Nummern 5. 6. 7. 8 lehren uns den Gang der Centralstrahlen an der Vorderseite der Linse und die Lage der Axenpunkte kennen. Die Entfernungen der letzteren von der Vorderfläche nach hinten betragen bei der Schweinslinse:

	Mittel	Berechnet
70	2·98	2·781
60	2·93	2·971
50	2·95	3·019

Die Axenpunkte der wirklichen Linsen liegen also fast genau an denselben Stellen, wie in der homogenen. Die Abweichungen sind so gering, dass darauf verzichtet wurde, sie in der Fig. 4 Taf. IX zum Ausdruck zu bringen. Es fallen in dieser Figur die Centralstrahlen der wirklichen und homogenen Linse zusammen. Die Brennlinien der wirklichen Linse sind, den Mittelwerthen der Tabellen entsprechend, an den Strahlen der homogenen Linse kenntlich gemacht. Die Bezeichnungen sind dieselben wie bei der Rindslinse. In der wirklichen Schweinslinse sind die Distanzen zwischen vorderen und hinteren Axenpunkten sehr viel geringer als in der homogenen.

	Wirkl. L. Gemessen	Homog. L. Berechnet
70	0·52	2·299
60	0·77	2·079
50	0·95	1·911

Die Verringerung dieser Distanzen wird auch hier bewirkt durch das Hineinrücken der hinteren Axenpunkte, welches an der Schweinslinse noch stärker ausgesprochen als bei der Rindslinse. Die stärker brechende Kernmasse muss mehr in der vorderen Hälfte der Linse sich befinden.

Die Gesammtquerverschiebung der Centralstrahlen fällt daher in der Schweinslinse verhältnissmässig noch geringer aus. Auch bei der Schweinslinse ist die Lage der Brennstrecken an den Centralstrahlen fast genau dieselbe wie bei der homogenen Linse.

Ideale geschichtete Linsen.

Wenn wir dazu übergehen, die Folgerungen bezüglich des Baues der thierischen Linsen zu ziehen, so schicke ich voraus, dass ich es für unmöglich halte, schon jetzt über die Construction derselben Definitives festzustellen, was dann wieder als Grundlage für die Rechnung dienen könnte. Wir kennen noch nicht die Lage des Kernes, noch nicht die Krümmung seiner Flächen, ob sie den Aussenflächen parallel (homothetisch) sind oder nicht. Ebenso wenig wissen wir dies von den übrigen Schichten. Auch die Indices der einzelnen Schichten sind keineswegs festgestellt. Die Zahl der möglichen Combinationen ist vorläufig noch eine gar zu grosse. Wenn wir aber auch nicht über die zu einer mathematischen Berechnung nöthigen Grundlagen verfügen, so erlauben doch die vorstehenden Ermittlungen hinsichtlich des inneren Baues der thierischen Linsen im Allgemeinen bestimmte Behauptungen aufzustellen.

Wir verglichen mit den wirklichen Thierlinsen zwei flache Linsen, nämlich die ideale homogene Menschenlinse und die biconvexe Glaslinse, mit Rücksicht auf Lage und Länge der Brennstrecken und sahen, dass das Verhältniss der Brennstrecken an Centralstrahlen und Radialstrahlen zu einander, welches die wirklichen Linsen abweichend von den homogenen zeigen, dasselbe war, welches die flachen Linsen charakterisirte.

Durch ihren inneren Bau haben die thierischen Linsen ein ähnliches Brechungsvermögen erlangt, wie es sonst nur flachen Linsen zukommt. Der innere Bau derselben muss so beschaffen sein, dass eine Brechung erzeugt wird, wie sie charakteristisch für die flachen Linsen ist. Dies kann nur dadurch geschehen, dass ein flacher Kern mit stärkerem Brechungsindex vorhanden ist. Ich rede der Kürze wegen nur von einem Kern, während ja ausser demselben noch verschiedene Schichten zu berücksichtigen wären. Doch braucht die Krümmung seiner Flächen nicht nothwendig geringer zu sein, als die der Aussenflächen, vielmehr können sie diesen parallel sein. Obgleich, wie gesagt, noch zu viele Unbekannte vorhanden sind, um die exakte Lösung der Aufgabe zu gestatten, so habe ich doch versucht, durch Einfügung eines flachen Kerns schematisch die Brechung darzustellen, wie sie in den wirklichen Thierlinsen stattfindet (Taf. VII Fig. 4; Taf. VIII Fig. 4).

Ideale geschichtete Rindslinse.	Ideale geschichtete Schweinslinse.
Axendurchmesser:	
Vordere Schale = 4, Kern = 3, Hintere Schale = 5	Vordere Schale = 2·5, Kern = 1·54, Hintere Schale = 2·96
Radien des Kerns $r_1 = 10$, $r_2 = 5$.	Radien des Kerns $r_1 = 5{\cdot}0$, $r_2 = 2{\cdot}502$.
Indices	Indices
Schale $n_1 = 1{\cdot}38$, Kern $n_2 = 1{\cdot}46$, $n_2 : n_1 = 1{\cdot}058$	Schale $n_1 = 1{\cdot}38$, Kern $n_2 = 1{\cdot}455$, $n_2 : n_1 = 1{\cdot}054$
Totalindex = 1·54	Totalindex = 1·54
Centrale Brennweite (Hinterfläche) = 9·158.	Centrale Brennweite (Hinterfläche) = 4·846.

Der Kern ist weiter nach vorn gelegt der Verschiebung der hinteren Axenpunkte wegen. Die Centralstrahlen sind gestrichelt gezeichnet. Neben den zweiten Brennlinien stehen die Zahlen 70° 60° und 70°. Die hinteren Axenpunkte sind von a nach a_1 gerückt und haben sich denen der wirklichen Linse genähert, während die vorderen ihren Platz nicht gewechselt haben, — die Brennstrecken erscheinen bedeutend verlängert, so dass diese schematischen Linsen in der That ein der Brechung in den wirklichen Linsen ähnliches Verhalten zeigen. Für die Scheitelstrahlen — es ist in beiden Linsen derjenige des 70°-Bündels gezeichnet — darf man nicht den Index der Schale wählen, weil dieser Strahl in Wirklichkeit ja auch noch stärker brechende Schichten durchsetzt, wenn er auch an dem Kern vorbeigeht. Ich habe den Index = 1·5 genommen. Man sieht, dass für den Scheitelstrahl die Aenderung immer nur eine geringfügige sein kann; der mit dem Index 1·5 gebrochene Strahl verläuft wenig verschieden von demjenigen der homogenen Linse mit dem Index 1·54, wie wir ja auch in der Tabelle XIV sahen, dass die

Brennstrecken der Radial- und Scheitelstrahlen an den wirklichen Linsen wenig von denen an den homogenen abwichen. Die einzige Abweichung hinsichtlich dieser Strahlen bestand nur in der Aequatorialverschiebung, welche aber bei der flacheren Rindslinse kaum noch Beachtung verdiente.

		Axenpunkte der Centralstrahlen vor der Hinterfläche.			Brennlinien der Centralstrahlen.								
					Wirkliche Linse			Ideal-geschichtete Linse			homogene Linse		
		Wirkl. L.	Ideal-gesch. L.	homog. L.	I	II	Bst	I	II	Bst	I	II	Bst
Rind:	70^0	4·65	4·081	3·047	0·7	6·9	6·2	1·18	5·97	4·79	3·8	7·0	3·2
	60^0	4·5	4·216	3·208	2·2	5·7	3·7	2·6	6·5	3·9	4·8	7·5	2·7
Schwein:	70^0	3·5	2·46	1·92	0·3	3·6	3·3	0·48	2·9	2·42	2·2	3·8	1·6

Wenn die hinteren Axenpunkte noch nicht in demselben Grade nach innen gerückt sind, welchen das Experiment an den wirklichen Linsen nachwies, so ist doch die Annäherung eine bedeutende.

Auch in Bezug auf die Lage und Länge der Brennstrecken bietet die ideale geschichtete Linse einen Sachverhalt, welcher sich demjenigen in der wirklichen Thierlinse nähert. In der vorderen Linsenhälfte erleiden die Centralstrahlen, wie auch an der wirklichen Linse, keine Verschiebung.

Werfen wir noch einen Blick auf die Scheitelstrahlen, so verlaufen dieselben in der geschichteten Linse nicht viel anders, als in der homogenen mit entsprechendem Totalindex. Nimmt man aber statt des letzteren einen zwischen Totalindex und Schalenindex die Mitte haltenden Sammelindex, in unseren idealen geschichteten Linsen 1·5, so wird die Annäherung sehr gross. Die Brennstrecke des 70^0-Scheitelstrahles der idealen Rindslinse Taf. VII Fig. 4. z hat zum Beispiel fast genau dieselbe Lage wie die Brennstrecken 5, 5 der 70^0-Bündel in Fig. 1 und 2 derselben Tafel. Auch hinsichtlich der Länge besteht kaum ein Unterschied. Dasselbe gilt von der Brennstrecke des Scheitelstrahles der idealen Schweinslinse Taf. VIII Fig. 4. z und den Brennstrecken 5, Fig. 1 und 2, Fig. 2.

Die Caustica externa ist zwar länger als in der homogenen Linse, jedoch erhält das Brenngebilde in Folge der geringeren Querverschiebung, welche die Centralstrahlen erleiden, eine schlankere, mehr in die Länge gezogene Gestalt, als sie den homogenen Linsen eigen ist.

Die homogene menschliche Linse liess den einen Arm der Caustica vermissen, was durch ihre flache Form bewirkt wurde. Wir dürfen erwarten, dass die schon durch die flache Aussenform bedingte Schlankheit des Brenngebildes noch durch die Schichtung gesteigert wird, und dürfen vielleicht hierin einen Fingerzeig erblicken, welcher uns bezüglich der Zweckmässigkeit den richtigen Weg weisen kann.

Das Gesammtresultat, welches mit den von mir zuerst 1875 ausgesprochenen Behauptungen übereinstimmt, lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

1. Die thierischen Linsen brechen schräge Bündel, welche einen Winkel von etwa 30^0 mit der Axe und darüber bilden, im Allgemeinen ungünstiger hinsichtlich der Aberrationsverhältnisse.

2. Die Scheitel- und Radialstrahlen erfahren in den thierischen Linsen ungefähr dieselbe Brechung und haben Brennstrecken von nahezu derselben Lage und Länge wie in den homogenen.

3. Die übrigen Strahlen und besonders die Centralstrahlen haben bedeutend längere Brennstrecken.

4. Die an der Hinterfläche austretenden Centralstrahlen erscheinen nach der Mitte der Linse hin verschoben.

5. Die thierischen Linsen stehen hinsichtlich ihres Brechungsvermögens den flachen homogenen Linsen näher als den der Aussenform entsprechenden dickeren homogenen Linsen.

6. Die thierischen Linsen enthalten einen mehr nach vorn gerückten flachen Kern, beziehendlich flachere Schichten. Die Grenzflächen können homothetisch sein.

7. Paraxiale Bündel und solche, welche mit der Axe einen kleineren Winkel als etwa 30^0 bilden, werden von den thierischen Linsen mit geringerer Aberration gebrochen.

8. Irgend eine Einrichtung, welche bei den schrägeren Bündeln Verkürzung der Brennstrecken bewirken könnte, ist nicht vorhanden. Vom Zweckmässigkeitsstandpunkte aus betrachtet, hat also die Natur eine solche Verkürzung nicht für nöthig befunden.

9. Dagegen erscheint die schlanke, in die Länge gezogene Gestalt der Brenngebilde, welche in flachen Linsen die Folge des Fortfalls des einen Armes der Caustica externa war, durch die Schichtung hervorgerufen auch in den thierischen Linsen.

Tabelle XV.

Rindslinse. Hinterfläche.

		Entfernungen von der Hinterfläche																		(Id. hom. Rindslinse $r = 14$ $\varrho = 10$ $d = 12$ $n = 1{\cdot}54$ $F = 9{\cdot}171$.)
		No. 1			No. 2			No. 3			No. 4			Mittel			Berechnet			
λ	λ_1	I	II	B	I	II	B	I	II	B	I	II	B	I	II	B	I	II	B	
70	70	1·0	8·2	7·2	0·5	8·5	8	0	7	7	1·5	8·5	7·0	0·8	8·0	7·2	3·8	7·0	3·2	(70^0) Central
	60	2·5	7·5	5·0	1·5	8	6·5	2·5	7·2	4·7	1·5	7·5	6·0	2·0	7·5	5·5				
	50	3·0	7·0	4·0	3·5	6·5	3	2·8	6·8	4	2·5	6·5	4·0	3·0	6·7	3·7				
	40	3·5	6·5	3·0	3·2	6	2·8	2·4	6	3·6	2·5	6	3·5	2·9	6·1	3·2	2·9	6·2	3·3	$(42^0\ 24)$ Radial
	30	1·0	6·0	5·0	1·0	5	4	1·5	5·3	3·8	1	5	4	1·1	5·3	4·2	2·2	5·8	3·6	$(33^0\ 52)$ Scheitel
	20	0	5·0	5·0				0	4·5	4·5	0·8	5	4·2	0·3	4·8	4·5	1·6	5·4	3·8	$(24^0\ 40)$ Lateral
	10	0	6·0	6·0										0	6·0	6·0				
	0																			
60	70	2	9	7										2	9	7				
	60	2	8·5	6·5	2	8·5	6·5	1·8	7·3	5·5	1·5	7·5	6	1·8	7·9	6·1	4·8	7·5	2·7	(60^0) Central
	50	4	7·5	3·5	4	8	4	3·2	7	3·8	3·2	7·2	4	3·6	7·4	3·8				
	40	5	7	2	4·5	7	2·5	4	6·5	2·5	4	7	3	4·4	6·9	2·5	4·5	7·0	2·5	$(37^0\ 40)$ Radial
	30	2·5	6·5	4	3·5	6	2·5	3	6·2	3·2	3	7	4	3	6·4	3·4	3·8	6·7	2·9	$(30^0\ 42)$ Scheitel
	20	1·5	7	5·5	1	5·5	4	1·5	5·5	4	1·5	5·5	4	1·4	5·9	4·4	3·3	6·5	3·2	$(26^0\ 3)$ Lateral
	10	0	5·5	5·5				0·5	4·7	4·2	0	4·5	4·5	0·2	4·9	4·7				
	0	0	5	5										0	5	5				
50	60	3·5	9	5·5										3·5	9	5·5				
	50	5·5	8·5	3	4	8·5	4·5	3·8	7·8	4				4·4	8·3	3·9	5·9	8·0	2·1	(50^0) Central
	40	5	8	3	5·5	8	2·5	5·5	7·5	2				5·3	7·8	2·5				
	30	5·5	8	2·5	6	7	1	4·5	7	2·5				5·3	7·3	2	5·9	7·7	1·8	$(32^0\ 21)$ Radial
	20	3	6	3	4	7	3	3	6	3				3·3	6·3	3	5·3	7·5	2·2	$(26^0\ 43)$ Scheitel
	10	1	6	5	1	7	6	1	5·5	4·5				1	6·1	5·1	5·1	7·5	2·4	$(23^0\ 52)$ Lateral
	0	1	6·5	5·5				0·5	5·5	5				0·7	6	5·2				

Tabelle XVI.

Rindslinse. Hinterfläche.

	Entfernungen von der Hinterfläche																								Mittel		
	No. 5	I	II	B	No. 6	I	II	B	No. 7	I	II	B	No. 8	I	II	B	No. 9	I	II	B	No. 10	I	II	B	I	II	B
70]																											
70	+ 3·7	— 0·9	4·7	5·6	+ 4·8	1·4	5·5	4·1	+ 4·8	0·8	5·7	4·9	+ 3·6	0·5	7·5	7·0					+ 5·2	1·3	7·5	6·2	0·6	6·2	5·6
60	+ 2·2	1·2	4·9	3·7	+ 3	2·6	6·5	3·9	+ 3	1·9	5·4	3·5	+ 1·9	1·4	6·9	5·5	+ 3·5	1·0	7·4	6·4	+ 3·5	3·3	8·1	4·8	1·9	6·5	4·6
50	+ 0·3	2·5	5·5	3·0	+ 0·5	3·3	7·0	3·7	+ 0·5	3·1	6·0	2·9	0	2·4	6·5	4·1	+ 1·7	2·4	6·9	4·5	+ 1	4·4	8·2	3·8	3·0	6·7	3·7
40	— 1·7	2·4	5·7	3·3	— 1·5	3·1	6·3	3·2	— 1·6	3·6	5·7	2·1	— 2	2·6	6·2	3·6	— 0·6	2·8	6·3	3·5	— 1·5	4·4	7·4	3·0	3·1	6·2	3·1
30	— 3·6	2·3	6·0	3·7	— 3·6	2·1	5·3	3·2	— 3	2·7	5·0	2·3	— 3·8	2·0	6·0	4·0	— 2·8	2·0	5·8	3·8	— 3·8	4·0	7·0	3·0	2·6	5·9	3·3
20	— 5·4	1·8	5·4	3·6	— 5·5	1·9	5·4	3·5	— 5·5				— 5·4	1·3	5·9	4·6	— 4·7	1·5	5·3	3·8	— 6	2·3	6·0	3·7	1·8	5·6	3·8
10					— 7	0·8	5·3	4·5					— 7·5	1·0	5·4	4·4									0·9	5·4	4·5
0																											
60]																											
70	+ 5	— 0·9	5·7	6·5	+ 6	1·2	5·7	4·5	+ 6·2	1·0	5·5	4·5	+ 4·8	0·5	7·2	6·7									0·5	6·0	5·5
60	+ 3·7	1·7	5·2	3·5	+ 4·6	2·9	6·2	3·3	+ 4·5	2·0	5·6	3·6	+ 3·4	2·5	7·5	5·0	+ 5	2·0	8·2	6·2	+ 4·9	3·4	8·9	5·5	2·4	6·9	4·5
50	+ 1·7	3·9	6·3	2·4	+ 2·3	3·9	7·0	3·1	+ 2·3	4·5	6·3	1·8	+ 1·3	3·4	7·4	4·0	+ 3	2·5	7·5	5·0	+ 2·7	6·0	9·5	3·5	4·0	7·1	3·1
40	— 0·5	4·2	6·7	2·5	— 0·2	4·6	7·4	2·8	— 0·4	5·0	6·6	1·6	— 1	3·4	6·8	3·4	+ 0·6	3·9	7·0	3·1	0	5·5	8·0	2·5	4·4	7·1	2·7
30	— 2·8	4·0	6·5	2·5	— 2·7	4·1	6·6	2·5	— 2·9	4·7	6·2	1·5	— 3	3·5	6·5	3·0	— 2	3·0	6·6	3·6	— 3	5·5	7·7	2·2	4·1	6·7	2·6
20	— 4·9	2·6	6·3	3·7	— 4·9	2·8	6·1	3·3	— 5·7	2·4	4·4	2·0	— 5	2·6	6·6	4·0	— 4·2	3·0	6·5	3·5	— 5·4	3·8	6·8	3·0	2·9	6·1	3·2
10	— 6·4	1·4	6·2	4·8	— 6·7	1·6	6·0	4·4					— 6·5	0·7	6·0	5·3	— 6	1·6	6·0	4·4	— 7·1	2·3	7·0	4·7	1·5	6·2	4·7
0					— 8	0·7	5·5	4·8																	0·7	5·5	4·8
50]																											
60	+ 5·3	2·3	5·7	3·4	+ 6	2·5	6	3·5	+ 6·1	2·2	5·7	3·5	+ 4·8	2·2	7·5	5·3					+ 6·5	3·8	8·7	4·9	2·6	6·7	4·1
50	+ 3·3	4·3	6·3	2·0	+ 4·2	4·2	6·8	2·6	+ 4	4·0	6·0	2·0	+ 3	4·3	7·5	3·2	+ 4·6	3·0	8·1	5·1	+ 4·4	5·3	8·7	3·4	4·2	7·2	3·0
40	+ 1	5·4	6·8	1·4	+ 1·6	5·5	7·5	2·0	+ 1·5	5·3	6·3	1·0	+ 0·6	5·2	7·2	2·0	+ 2	5·1	8·0	2·9	+ 1·7	7·3	9·3	2·0	5·6	7·5	1·9
30	— 1·5	5·7	7·2	1·5	— 1·2	5·7	7·7	2·0					— 1·8	5·0	7·0	2·0	— 0·6	5·5	6·5	1·0	— 1·4	7·2	9·4	2·2	5·8	7·5	1·7
20	— 4	5·1	7·3	2·2	— 4	5·0	7·4	2·4					— 4	4·1	7·0	2·9	— 3·4	4·0	6·8	2·3	— 4·7	6·0	8·0	2·0	4·9	7·3	2·4
10	— 6	3·3	6·9	3·6	— 6	3·1	6·9	3·8					— 6	2·0	6·5	4·5	— 5·7	3·1	6·9	3·8	— 6·6	4·0	8·0	4·0	3·1	7·0	3·9
0	— 7·4	1·4	6·3	4·9	— 7·7	1·6	6·4	4·8					— 7·3	2·0	6·5	4·5	— 7·4	1·3	6·0	4·7	— 8·1	1·5	7·5	6·0	1·5	6·5	5·0

No. 5	No. 6	No. 7	No. 8	No. 9	No. 10
F = 9·3	F = 9	F = 9	F = 9	F = 9·1	F = 9·4
D = 11·4	D = 12·1	D = 12	D = 11·7	D = 12	D = 12·2

Axenpunkte der Centralstrahlen vor der Hinterfläche.

	No. 5	No. 6	No. 7	No. 8	No. 9	No. 10
70°	4·6	4·6	4·6	4·8		4·7
60°	4·2	4·4	4·5	4·7	4·7	4·6
50°	4·2	4·2	4·5	4·7	4·5	4·6

Axenpunkte.

	Mittel	Berechnet
70°	4·65	3·047
60°	4·5	3·208
50°	4·45	3·349

Gesammtmittel					Berechnet				
λ	λ_1	I	II	B		I	II	B	
70	70	0·7	6·9	6·2	Central	3·8	7·0	3·2	
	40	3·0	6·2	3·2	Radial	2·9	6·2	3·3	(42° 24)
	30	2·0	5·7	3·7	Scheitel	2·2	5·8	3·6	(33° 52)
60	60	2·2	7·3	5·1	Central	4·8	7·5	2·7	
	40	4·4	7·0	2·6	Radial	4·5	7·0	2·5	(37° 40)
	30	3·7	6·6	2·9	Scheitel	3·8	6·7	2·9	(30° 42)
50	50	4·3	7·6	3·3	Central	5·9	8·0	2·1	
	30	5·6	7·4	1·8	Radial	5·9	7·7	1·8	(32° 21)
	20	4·3	6·9	2·6	Scheitel	5·3	7·5	2·2	(26° 43)
					Lateral	5·1	7·5	2·4	(23° 52)

Tabelle zu Tafel VII.

Rindslinse. Hinterfläche.

		No. 8. Fig. 1.							No. 9. Fig. 2.							No. 10. Fig. 3.						
			Entfernung von der Ebene des Drehpunkts			Entfernung von der Hinterfläche				Entfernung von der Ebene des Drehpunkts			Entfernung von der Hinterfläche				Entfernung von der Ebene des Drehpunkts			Entfernung von der Hinterfläche		
λ	λ_1	Verschiebung	H.-Fl.	I	II	I	II	Bst	Verschiebung	H.-Fl.	I	II	I	II	Bst	Verschiebung	H.-Fl.	I	II	I	II	Bst
70	70	+ 3·6	8·2	8·7	15·7	0·5	7·5	7								+ 5·25	9·4	10·7	16·9	1·3	7·5	6·2
	60	+ 1·9	8·8	10·2	15·7	1·4	6·9	5·5	+ 3·5	9·8	10·8	17·2	1	7·4	6·4	+ 3·5	9·4	12·7	17·5	3·3	8·1	4·8
	50	0	9·2	11·6	15·7	2·4	6·5	4·1	+ 1·7	10·3	12·7	17·2	2·4	6·9	4·5	+ 1	9·8	14·2	18	4·4	8·2	3·8
	40	— 2	8·8	11·4	15	2·6	6·2	3·6	— 0·6	10·2	13	16·5	2·8	6·3	3·5	— 1·5	9·8	14·2	17·2	4·4	7·4	3
	30	— 3·8	8·2	10·2	14·2	2	6	4	— 2·8	9·9	11·9	15·7	2	5·8	3·8	— 3·8	9·2	13·2	16·2	4	7	3
	20	— 5·4	6·9	8·2	12·8	1·3	5·9	4·6	— 4·75	9·4	10·4	14·2	1·5	5·3	3·8	— 6	8·4	10·7	14·4	2·3	6	3·7
	10	— 7·5	4·8	5·8	10·2	1	5·4	4·4														
60	70	+ 4·8	7·7	8·2	14·9	0·5	7·2	6·7														
	60	+ 3·4	8·2	10·7	15·7	2·5	7·5	5·0	+ 5	9·2	11·2	17·4	2	8·2	6·2	+ 4·9	8·8	12·2	17·7	3·4	8·9	5·5
	50	+ 1·3	8·8	12·2	16·2	3·4	7·4	4	+ 3	10·2	12·7	17·7	2·5	7·5	5	+ 2·75	9·2	15·2	18·7	6	9·5	3·5
	40	— 1	9·4	12·8	16·2	3·4	6·8	3·4	+ 0·6	10·7	14·6	17·7	3·9	7·0	3·1	0	10·2	15·7	18·2	5·5	8	2·5
	30	— 3	8·7	12·2	15·2	3·5	6·5	3	— 2	10·2	13·2	16·8	3	6·6	3·6	— 3	9·7	15·2	17·4	5·5	7·7	2·2
	20	— 5	7·6	10·2	14·2	2·6	6·6	4	— 4·25	9·2	12·2	15·7	3	6·5	3·5	— 5·4	8·9	12·7	15·7	3·8	6·8	3·0
	10	— 6·5	6·2	6·9	12·2	0·7	6	5·3	— 6	8·2	9·8	14·2	1·6	6	4·4	— 7·1	7·2	9·5	14·2	2·3	7	4·7
50	60	+ 4·8	7·7	9·9	15·2	2·2	7·5	5·3								+ 6·5	8	11·8	16·7	3·8	8·7	4·9
	50	+ 3	8·2	12·5	15·7	4·3	7·5	3·2	+ 4·6	9·7	12·7	17·8	3	8·1	5·1	+ 4·4	9·5	14·8	18·2	5·3	8·7	3·4
	40	+ 0·6	9	14·2	16·2	5·2	7·2	2	+ 2	10·2	15·3	18·2	5·1	8	2·9	+ 1·75	9·9	17·2	19·2	7·3	9·3	2
	30	— 1·8	9·2	14·2	16·2	5	7	2	— 0·6	10·7	16·2	17·2	5·5	6·5	1	— 1·4	9·8	17	19·2	7·2	9·4	2·2
	20	— 4	8·2	12·3	15·2	4·1	7	2·9	— 3·4	10·2	14·7	17	4	6·8	2·3	— 4·25	9·2	15·2	17·2	6	8	2
	10	— 6	7·2	9·2	13·7	2	6·5	4·5	— 5·7	8·6	11·9	15·5	3·1	6·9	3·8	— 6·6	7·7	11·7	15·7	4	8	4
	0	— 7·3	5·2	7·2	11·7	2	6·5	4·5	— 7·4	7·2	8·5	13·2	1·3	6	4·7	— 8·1	5·7	7·2	13·2	1·5	7·5	6

F = 9·0 D = 11·7
Hinterfläche 8·6 vom Drehpunkt

F = 9·1 D = 12
Hinterfläche 10·5 vom Drehpunkt

F = 9·4 D = 12·2
Hinterfläche 10·3 vom Drehpunkt.

Tabelle XVIII.

Paraxiale Aberration. Rindslinse. Entfernungen von der Hinterfläche.

λ	No. 1.			No. 2.			No. 3.			No. 4.			No. 5.			No. 6.			No. 7.			Mittel (W.)			Berechnet (Ho.)			
																										(I)	(II)	(B)
40°	0·5	9·0	8·5	2	7·4	5·4	2	8·9	6·9	2	9	7	1·3	7·4	6·1	1·8	8·1	6·3	1·5	8·5	7	1·6	8·3	6·7				
30°	3·5	9·4	5·9	4·3	8·8	4·5	3	8·5	5·5	2·9	9·5	6·6	3·4	8·2	4·8	2·8	7·8	5·0	4·2	8·1	3·9	3·4	8·6	5·2	(24° 55)	4·39	8·22	3·83
20°	6·6	8·9	2·3	6·0	7·9	1·9	6·5	9·1	2·6	5·8	9·1	3·3	6·1	8·6	2·5	6·2	8·7	2·5	6·4	8·9	2·5	6·2	8·7	2·5				
10°		9·3			8·7			9·4			9·4			9·2			9·1			9·4			9·3		(11° 1)	7·94	8·94	1·00
0		9·3			9·4			9·4			9·4			9·5			9·1			9·2			9·3					

No. 2. Paraxiale Aberration. [1]

λ	Versch.	H. [2]	I [2]	II [2]	B
40°	+ 9	3·6	5·6	11·0	5·4
30°	+ 7·8	5·5	9·8	14·3	4·5
20°	+ 5·8	8·1	14·1	16·0	1·9
10°	+ 3	8·8	17·5		0
0	6	9·1	18·5		0

[1]) In Fig. 2 Taf. IX dargestellt. [2]) Entfernungen von der Ebene des Drehpunktes.

Tabelle XIX.

a) Rindslinse. Vorderfläche.

No. 1. No. 2.

λ	λ_1	I	II	B	I	II	B
70	85	2	6	4	0	6	6
	70	2	5	3	2	5	3
	60				1·8	4·8	3
	50	1·5	4·5	3			
	40	0·7	4·5	3·8	(Radial)		
	30	— 0·5	4·0	4·5	— 1·5	3·4	4·9
	20				— 1·8	3·4	5·2
60	75	1·5	5·5	4	1·8	5·8	4
	60	3·2	5·5	2·3	3·5	5·7	2·2
	50				2·5	5	2·5
	40	2	5	3	(Radial)		
	30	1·2	5	3·8			
	20	0	4	4	— 0·9	3·8	4·7
	10				— 1·4	3·8	5·2
50	65	2	5·5	3·5	2·7	5·9	3·2
	50	4	6	2	4·3	6·3	2
	40				3·6	5·8	2·2
	30	2	5	3	(Radial)		
	20	2	5	3			
	10	0	4·7	4·7	— 1	4	5
	0				— 1	4	5

d) Mittel für die Entfernungen der Axenpunkte von der Vorderfläche.

70°	60°	50°	40°	30°	
4·0	4·4	4·5	5·0	5·3	Gefunden
4·6	4·855	5·093	—	—	Berechnet

e) Distanzen zwischen vord. u. hint. Axenpunkten.

70°	60°	50°	
3·35	3·1	3·05	Gefunden
4·35	3·937	3·558	Berechnet

Rindslinse. Vorderfläche.

b) Centralstrahlen.

No. 3.	Erste (Ordinaten vom Drehpunkt ab)	Zweite (Ordinaten vom Drehpunkt ab)			Entfernungen ab Vorderfläche			
	Verschieb.	V.-Fl.	I. Brl.	II. Brl.	Axenp.	I	II	Bst
70	+ 3	10·7	12·2	15·3	4·2	1·5	4·6	3·1
60	+ 2·5	10·7	14	16	4·5	3·3	5·3	2·0
50	+ 2·1	10·5	14·5	16	4·7	4·0	5·5	1·5
0	+ 0·0	9·6	17·3	17·3	—	7·7	7·7	0·0
No. 4.								
70	+ 3·3	11	13	15·7	3·8	2·0	4·7	2·7
60	+ 2·6	10·7	13·6	16·1	4·3	2·9	5·4	2·5
50	+ 2·2	10·5	14·5	16·6	4·4	4·0	6·1	2·1
40	+ 1·5	—	—	—	5·0	—	—	—
30	+ 1·0	—	—	—	5·3	—	—	—
0	+ 0·0	9·5	16·8	16·8	—	7·3	7·3	0·0
No. 5.								
70	+ 2·6	10	12	15	2·0	2	5	3
60	+ 2·1	10·2	13	15	2·4	2·8	4·8	2
50	+ 1·9	10·8	13·5	15·1	2·3	2·7	4·3	1·6
0	+ 0·0	9	16·4	16·4	—	7·4	7·4	0·0

c) Mittel aus 3. 4. 5 (dargestellt in Fig. 3 Tafel IX).

	Erste (Ordinaten vom Drehpunkt ab)	Zweite (Ordinaten vom Drehpunkt ab)		
	Verschiebung	Vorderfläche	I. Brennl.	II. Brennl.
70°	+ 3·0	10·6	12·4	15·3
60°	+ 2·4	10·5	13·5	15·7
50°	+ 2·1	10·6	14·2	15·9
0		9·4	16·8	16·8

Vordere Brennweite = 7·4.

Drehpunkt 7·2 hinter dem Scheitel der Vorderfläche.

f) Centralstrahlen.

Entfernungen von der Vorderfläche.

	Gesammtmittel			Berechnet		
	I	II	Bst	I	II	Bst
70°	1·9	4·9	3·0	2·106	4·799	2·693
60°	3·1	5·3	2·2	5·544	3·18	2·364
50°	3·8	5·6	1·8	6·13	4·253	1·877
0	7·4	7·4	0·0	7·58	7·58	0

Tabelle XX.

Schweinslinse.

Axenpunkte der Centralstrahlen vor der Hinterfläche (mm):

	Länge der Axe in mm:	70⁰	Abweichung vom Mittel in Zehntel	60⁰	Abweichung vom Mittel in Zehntel	50⁰	Abweichung vom Mittel in Zehntel	Hintere Brennweite central von der Hinterfläche ab in mm:
1	7·7	3·0	5	3·0	3	2·9	2	
2	7·7	2·8	7	3·1	2	3·2	1	
3	7·9	3·2	3	3·3	0	3·6	5	
4	8·0	3·2	3	3·2	1	3·3	2	
5	6·9—7	3·0	5	3·0	3	2·8	3	4·5
6	6·9—7	3·1	4	3·0	3	3·0	1	4·5
7	7	2·95	5	2·95	3	2·75	4	4·8
8	6·9	3·1	4	3·0	3	2·9	2	4·3
9	6·9	3·1	4	3·0	3	2·8	3	4·2
10	6·9	3·1	4	3·0	3	2·7	4	4·5
11	7	2·8	7	2·9	4	3·0	1	
12	6·5	2·7	8	2·5	8	2·4	7	
13	7	3·3	2	3	3	2·8	3	
14	7·2	3·5	0	3·1	2	3·0	1	
15	6·9	3·4	1	3·0	3	2·8	3	
16	6·9	3·9	4	3·7	4	3·5	4	4·4
17	7	3·0	5	2·7	4	2·6	5	4·6
18	7	3·2	3	3·2	1	3·1	0	4·8
19	7	2·8	7	2·7	6	2·5	6	4·2
20	6·9	2·8	7	2·6	7	2·6	5	4·6
21	8	4·3	8	4·1	8	4·0	9	4·8
22	7	3·3	2	3·3	0			4·9
23	7	4·06	5	3·7	4			4·5
24	7·4	4·1	6	3·8	5	3·6	5	5
25	7·8	3·8	3	3·8	5	3·7	6	4·9
26	7·5	4·1	6	3·6	3			4·8
27	6·5	3·7	2	3·4	1	3·2	1	4·6
28	7·3			2·9	4	3·0	1	5·2
29	6·7			2·6	7			4·6
30	6·7	3·3	2	3·1	2			4·3
31	7·6	4·3	8	3·7	4	3·5	4	4·6
32	6·8	4·2	7	3·6	3	3·3	2	4·9
33	7	3·7	2	3·4	1	3·2	1	5
34	7	4·1	6	3·5	2	3·1	0	4·4
35	7	3·7	2	3·2	1	2·9	2	4·4
36	7	4·1	6	3·5	2	3·1	0	4·4
37	7·3	3·7	2	3·3	0	3·0	1	4·3
38	7	3·8	3	3·5	2	3·3	2	4·8
39	7·6	4·3	8	3·8	5	3·6	5	4·9
40	7·5	4·3	8	3·9	6	3·6	5	4·7
41	6·5	4·3	8	3·9	6	3·4	3	4·5
42	7·0	3·8	3	3·4	1	3·1	0	4·5
42	7·13	3·5	0·46	3·3	0·3	3·1	0·3	4·6
Berechnet:		1·92		2·004		2·07		4·873

Lage der Brennlinien an den Centralstrahlen.
Entfernungen von der Hinterfläche.

	70⁰			60⁰			50⁰		
	I	II	Bst	I	II	Bst	I	II	Bst
1	0·9	3·1	2·2	2·2	3·7	1·5	2·7	3·8	1·1
2	1	2·8	1·8	1·9	3·8	1·9	2·6	3·9	1·3
3	0·6	3·6	3·0	1·3	3·5	2·2	2	3·7	1·7
4	0·7	3·5	2·8	1·4	3·8	2·4	2·2	4	1·8
5	2·4	4·9	2·5	3	4	1			
6	0·2	3·2	3	0·4	3	2·6	1	3	2
7				0·6	3·6	3	1·5	3·6	2·1
8				1·5	4	2·5	2·5	4·2	1·7
9	0	4	4	1	4	3	1·8	3·8	2
10	—1	3	4	0·2	3·2	3·0	1·2	3·7	1·5
11	0·3	1·8	1·5	1	2·6	1·6	1·3	2·5	1·2
12	0	3·6	3·6	0	3·4	3·4	1·8	3·2	1·4
13				1·7	2·9	1·2	1·9	3·4	1·5
14	—1·8	2·7	4·5	0	3·3	3·3	1·8	4	2·2
15	0	3·0	3·0	1	4	3	2	4·2	2·2
16	—1	3·1	4·1	0	3·4	3·4	1·7	3·7	2
17	—0·7	3	3·7	0	2·6	2·6	1·2	3·3	2·1
18	—1	3	4	0	3	3	2	3·5	1·5
19	—1	2·5	3·5	0	2·6	2·6	2	3·3	1·8
20	0	3·5	3·5	0·2	3·2	3	2·2	4	1·8
21				1·8	3·5	1·7	2·2	3·2	1
22				1	3·5	2·5	1·7	3·7	2
23	—1·2	3·3	4·5	0	3·3	3·3	0·8	3	2·2
24	0	3·7	3·7	1	3·7	2·7	1·5	3·8	2·3
Mittel:	—0·03	3·24	3·3	0·9	3·4	2·5	1·8	3·6	1·8
Berechnet:	2·237	3·785	1·548	2·748	4·049	1·301	3·24	4·3	1·086
	I	II	Bst	I	II	Bst	I	II	Bst
	70⁰			60⁰			50⁰		

Tabelle XXI.

Schweinslinse. Hinterfläche.

Entfernungen von der Hinterfläche.

a)	No. 15.			No. 16.			No. 18.			No. 12.				No. 11.				Mittel.		
	I	II	B	I	II	B	I	II	B	Versch.	I	II	B	Versch.	I	II	B	I	II	B
70]																				
70	0	3·5	3·5	— 1	2·5	3·5	0	3·7	3·7	+ 2·5	0·7	3·4	2·7	0	0	3·3	3·3	0·0	3·3	3·3
50														— 2·5	1·5	3·9	2·4			
40	1·5	3	1·5	0·5	2·7	2·2	1	3·5	2·5	— 1	0·7	2·9	2·2					1·0	3·2	2·2
30	0·4	3	2·6	0	2·5	2·5				— 2·1	0·1	2·6	2·5					0·2	2·7	2·5
60]																				
60	0·2	3·2	3	0	2·6	2·6	1	3·7	2·7	+ 2·6	1	3·4	2·4	+ 0·2	1·3	3·8	2·5	0·7	3·3	2·6
40				1·9	3·4	1·5	2·3	3·9	1·6	— 0·2	2	3·8	1·8	— 3	2·5	3·8	1·3	2·2	3·7	1·5
30	1·8	3	1·2	1·7	3·1	1·4				— 1·6	1·6	3·4	1·8					1·7	3·2	1·5
50]																				
50	2·2	4	1·8	1·5	3·3	1·8	1·5	3·8	2·3	+ 2·3	2·1	4·0	1·9	— 0·6	2·4	4	1·6	1·9	3·8	1·9
40				2·3	3·8	1·5	2·7	4·2	1·5	+ 0·7	2·6	3·6	1					2·5	3·8	1·3
30				2·7	3·4	0·7				— 0·9	2·9	3·7	0·8	— 3·5	3·5	4·5	1	3·0	3·8	0·8

F = 4·64, D = 7 (No. 12.) F = 4·8, D = 7·2 (No. 11.)

b)	No. 1.				No. 2.				No. 3.				No. 4.				No. 5.				No. 7.				No. 8.				No. 17.			Mittel.		
	V.	I	II	B	V.	I	II	B	V.	I	II	B	V.	I	II	B	V.	I	II	B	V.	I	II	B	V.	I	II	B	I	II	B	I	II	B
70]																																		
70	2·5	1	4·5	3·5	1·8	0	3·8	3·8	2·6	— 0·2	3·7	3·9	0·3	0·2	3·2	3					3·2	1·3	3·6	2·3	3	1·1	3·6	2·5	— 1·2	3·3	4·5	0·3	3·7	3·4
45	$\overline{0\cdot5}$	1·8	3·9	2·1	$\overline{0\cdot9}$	1·9	3·3	1·4	$\overline{0}$	1·3	3·7	2·4	$\overline{1\cdot9}$	1·8	3·5	1·7					0	2·3	3·7	1·4	$\overline{0\cdot4}$	2·3	3·8	1·5	0·2	3·1	2·9	1·7	3·6	1·9
60]									[20°: 2·7	— 0·3	2·5	2·8																						
60	2·2	2·0	4·5	2·5	2	1	3·5	2·5	2·7	0·7	3·8	3·1	0·5	2	4	2	1·2	0·8	4·2	3·4	3	2·1	3·6	1·5	2·8	2·0	3·8	1·8	0	3·3	3·3	1·3	3·8	2·5
40	$\overline{0\cdot4}$	2·9	4·9	2	$\overline{0\cdot7}$	2·5	3·6	1·1	$\overline{0}$	2·4	3·9	1·5	$\overline{1\cdot5}$	2·9	3·8	0·9	$\overline{0\cdot3}$	1·3	3·9	2·6	0	3·1	4·1	1	$\overline{0\cdot2}$	3·1	4·3	1·2	1·7	3·5	1·8	2·5	4·0	1·5
50]									[10°: 3·5	0·5	3·1	2·6																						
50					2	2·7	3·7	1	2·5	2·2	4	1·8	0·6	3	4	1	1·5	1·5	4	2·5	2·7	3·7	4·5	0·8	2·5	3·5	4·6	1·1	0·8	3	2·2	2·5	4·0	1·5
33					$\overline{0\cdot7}$	3·2	4·1	0·9	$\overline{0}$	3·5	4·5	1	$\overline{1\cdot4}$				$\overline{0\cdot2}$	2·1	4	1·9	$\overline{0\cdot2}$	3·4	4·3	0·9	$\overline{0\cdot4}$	3·8	4·4	0·6	2·7	3·7	1	3·1	4·1	1·0
									[0°: 4·3	1	3	2																						

No. 1.	No. 2.	No. 3.	No. 4.	No. 5.	No. 7.	No. 8.
F = 4·7	F = 4·6	F = 4·8	F = 4·6	F = 4·5	F = 4·5	F = 4·4
D = 7	D = 7	D = 7	D = 7·1	D = 7·1	D = 7	D = 7

Anmerkung. Die Verschiebungen unter den Strichen sind negativ zu rechnen.

c)	No. 9.				No. 10.				No. 14.				No. 13.				No. 6.				Mittel.		
	Versch.	I	II	B	Versch.	I	II	B	Versch.	I	II	B	Versch.	I	II	B	Versch.	I	II	B	I	II	B
70]																							
70	+ 0·5	0	4	4	+ 0·3	0	4	4	— 1	1·3	3·9	2·6	+ 3·4	1	4	3	+ 0·5	0	3	3	0·5	3·8	3·3
40	— 1·8	1·1	3·1	2	— 1·9	1·4	3·4	2	— 3·4	2	3·7	1·7					— 1·8	1·1	3·1	2	1·4	3·3	1·9
60]																							
60	+ 0·6	0·5	4	3·5	+ 0·6	0·5	4	3·9	— 0·7	1·6	4	2·4	+ 3·2	2·3	4·3	2	+ 0·6	0·5	3	2·5	1·1	3·9	2·8
30	— 2·3	1·6	3·3	1·7	— 2·3	1·8	3·4	1·6	— 3·7	2·5	4	1·5					— 2·3	1·6	3·3	1·7	1·9	3·5	1·6
50]																							
50	+ 0·8	1·7	4	2·3	+ 0·8	1·9	4	2·1	— 0·7	2·7	4·4	1·7	+ 3·4	3·1	4·1	1	+ 0·8	1·7	3·0	1·3	2·2	3·9	1·7
20	— 2·8	2·3	4	1·7	— 2·8	2·7	4·3	1·6	— 4	3·7	5	1·3					— 2·8	2·3	4	1·7	2·8	4·3	1·5

No. 9.	No. 10.	No. 14.	No. 13.	No. 6.
F = 4·8	F = 4·8	F = 4·3	F = 4·8	F = 4·8
D = 7·1	D = 7·2	D = 7	D = 7·1	D =

Tabelle XXII.

Schweinslinse.

No. 2.

			Entfernungen von der Ebene des Drehpunktes			Entfernungen von der Hinterfläche		
		Verschiebung	H.-Fl.	I	II	I	II	Bst
70	70	+ 1·8	5	5	8·8	0	3·8	3·8
	45	− 0·9	5·5	7·4	8·8	1·9	3·3	1·4
60	60	+ 2	5·4	6·4	8·9	1	3·5	2·5
	40	− 0·7	5·8	8·3	9·4	2·5	3·6	1·1
50	50	+ 2	5·6	8·3	9·3	2·7	3·7	1
	33	− 0·7	5·8	9	9·9	3·2	4·1	0·9

F = 10·9 − 6·3 = 4·6. Hinterfläche bei 6·3.

No. 6. Fig. 3.

70	70	+ 0·5	4·8	4·8	7·8	0	3	3
	40	− 1·8	4·2	5·3	7·3	1·1	3·1	2
60	60	+ 0·6	4·8	5·3	7·8	0·5	3	2·5
	30	− 2·3	4·3	5·9	7·6	1·6	3·3	1·7
50	50	+ 0·8	5·1	6·8	8·1	1·7	3·0	1·3
	20	− 2·8	3·8	6·1	7·8	2·3	4	1·7

F = 9·2 − 4·4 = 4·8. Hinterfläche bei 4·4.

No. 4.

70	70	+ 0·3	4·1	4·3	7·3	0·2	3·2	3
	45	− 1·9	3·8	5·6	7·3	1·8	3·5	1·7
60	60	+ 0·5	3·3	5·3	7·3	2	4	2
	40	− 1·5	3·8	6·7	7·6	2·9	3·8	0·9
50	50	+ 0·6	3·8	6·8	7·8	3	4	1
	33	− 1·4	4·2		7·7			

F = 8·9 − 4·3 = 4·6. Hinterfläche bei 4·3.

No. 7.

70	70	+ 3·2	5·5	6·8	9·1	1·3	3·6	2·3
	45	0	6·1	8·4	9·8	2·3	3·7	1·4
60	60	+ 3	5·8	7·9	9·4	2·1	3·6	1·5
	40	0	6·3	9·4	10·4	3·1	4·1	1
50	50	+ 2·7	5·8	9·5	10·3	3·7	4·5	0·8
	33	− 0·2	6·5	9·9	10·8	3·4	4·3	0·9

F = 11·8 − 7·3 = 4·5. Hinterfläche bei 7·3.

No. 3. Fig. 3.

			Entfernungen von der Ebene des Drehpunktes			Entfernungen von der Hinterfläche		
		Verschiebung	H.-Fl.	I	II	I	II	Bst
70	70	+ 2·6	5·5	5·3	9·2	− 0·2	3·7	3·9
	45	0	6·1	7·4	9·8	1·3	3·7	2·4
	20	− 2·7	5·8	5·5	8·3	− 0·3	2·5	2·8
60	60	+ 2·7	5·9	6·6	9·7	0·7	3·8	3·1
	40	0	6·4	8·8	10·3	2·4	3·9	1·5
	10	− 3·5	5·3	5·8	8·4	0·5	3·1	2·6
50	50	+ 2·5	6	8·2	10	2·2	4	1·8
	33	0	6·3	9·8	10·8	3·5	4·5	1
	0	− 4·3	4·8	5·8	7·8	1	3	2

F = 12·1 − 7·5 = 4·6. Hinterfläche bei 7·5.

No. 1.

70	70	+ 2·5	4·8	5·8	9·3	1	4·5	3·5
	45	− 0·5	5·5	7·3	9·4	1·8	3·9	2·1
60	60	+ 2·2	5·3	7·3	9·8	2·0	4·5	2·5
	40	− 0·4	5·5	8·4	10·4	2·9	4·9	2

F = 11·5 − 6·8 = 4·7. Hinterfläche bei 6·8.

No. 5.

70	70							
	45							
60	60	+ 1·25	4·1	4·9	8·3	0·8	4·2	3·4
	40	− 0·3	4·4	5·7	8·3	1·3	3·9	2·6
50	50	+ 1·5	4·3	5·8	8·3	1·5	4·0	2·5
	33	− 0·2	4·8	6·9	8·8	2·1	4	1·9

F = 10·3 − 5·8 = 4·5. Hinterfläche bei 5·8.

No. 8.

70	70	+ 3	5·7	6·8	9·3	1·1	3·6	2·5
	45	− 0·4	6	8·3	9·8	2·3	3·8	1·5
60	60	+ 2·8	5·8	7·8	9·6	2·0	3·8	1·8
	40	− 0·2	6·2	9·3	10·5	3·1	4·3	1·2
50	50	+ 2·5	5·8	9·3	10·4	3·5	4·6	1·1
	33	− 0·4	6·4	10·2	10·8	3·8	4·4	0·6

F = 11·9 − 7·5 = 4·4. Hinterfläche bei 7·5.

Tabelle XXIII.

Schweinslinse. Hinterfläche.

No. 12.	Fig. 1.	Verschiebung	Entfernung von der Ebene des Drehpunktes H.-Fl.	I. Brl.	II. Brl.	Entfernung von der Hinterfläche I	II	B	No. 14. Verschiebung	Entfernung von der Ebene des Drehpunktes I	II	B	Entfernung von der Hinterfläche I	II	B
70	70	+ 2·5	5·6	6·3	9	0·7	3·4	2·7	— 1·0	4	5·3	7·9	1·3	3·9	2·6
	60	+ 1·5	6·2	6·8	9·6	0·6	3·4	2·8							
	50	+ 0·1	6·3	7·4	9·4	1·1	3·1	2							
	40	— 1	6·3	7	9·2	0·7	2·9	2·2	— 3·4	3·3	5·3	7	2	3·7	1·7
	30	— 2·1	6·2	6·3	8·8	0·1	2·6	2·5	— 4·7	1·6	2·8	4·9	1·2	3·3	2·1
	20	— 3·1	5·6	5·6	7·7	0	2·1	2·1	— 5	0·8	1·3	3·8	0·5	3	2·5
	10														
60	70	+ 3·5	5·2	6·5	8·7	1·3	3·5	2·2	— 0·7	3·8	5·4	7·8	1·6	4	2·4
	60	+ 2·6	6·2	7·2	9·6	1	3·4	2·4							
	50	+ 1·1	6·2	8·2	9·7	2	3·5	1·5							
	40	— 0·2	6·2	8·2	10	2	3·8	1·8	— 3·75	2·8	5·3	6·8	2·5	4	1·5
	30	— 1·6	6·2	7·8	9·6	1·6	3·4	1·8							
	20	— 3	5·9	6·7	8·8	0·8	2·9	2·1	— 5	0·8	2·1	4·3	1·3	3·5	2·2
	10	— 4	5·2	5·2	7·7	0	2·5	2·5							
50	60	+ 3·5	5·2	7	9	1·8	3·8	2	— 0·7	3·4	6·1	7·8	2·7	4·4	1·7
	50	+ 2·3	6·2	8·3	9·7	2·1	3·5	1·4							
	40	+ 0·7	6·6	9·2	10·2	2·6	3·6	1							
	30	— 0·9	6·4	9·3	10·1	2·9	3·7	0·8		2·8	6·5	7·8	3·7	5	1·3
	20	— 2·2	5·9	7·7	9·7	1·8	3·8	2	— 4	2·1	5·4	6·5	3·3	4·4	1·1
	10	— 3·5	5·2	6·2	8·8	1	3·6	2·6							
	0	— 4·4	4·7	4·7	7·2	0	2·5	2·5	— 5	— 0·1	1·3	3·8	1·4	3·9	2·5

Axe: Hinterfläche 6·45 vom Drehpunkt. d = 7·0.
F: 11·05 vom Drehpunkt, 4·60 von der Hinterfläche.

F = 7·8 — 3·5 = 4·3. Hinterfläche bei 3·5.

		Gesammtmittel I	II	B	Berechnet I	II	B	
70	70	0·3	3·6	3·3	2·2	3·8	1·6	Central
	40	1·4	3·4	2·0	1·5	3·3	1·8	(44° 27) Radial
	30	0·2	2·7	2·5	0·9	3·0	2·1	(32° 20) Scheitel
60	60	1·1	3·7	2·6	2·8	4·1	1·3	Central
	40	2·4	3·9	1·5	2·4	3·8	1·4	(39° 13) Radial
	30	1·8	3·4	1·6	1·8	3·5	1·7	(29° 9) Scheitel
50	50	2·3	3·9	1·6	3·2	4·3	1·1	Central
	40	2·5	3·8	1·3	3·2	4·1	0·9	(33° 25) Radial
	30	3·1	4·1	1·0	2·6	3·9	1·3	(25° 35) Scheitel
	20	2·8	4·3	1·5				

Ideale homogene Schweinslinse:

$r = 7{\cdot}5$, $\varrho = 5{\cdot}5$, $d = 7$, $n = 1{\cdot}54$, $F = 4{\cdot}873$.

Tabelle XXIV.

Schweinslinse. Vorderfläche.

a) Entfernungen von der Vorderfläche.

		No. 1.			No. 2.			No. 3.			No. 4.			Mittel.		
		I	II	Bst.	I	II	Bst.	I	II	Bst.	I	II	Bst.	I	II	Bst.
70	85	0	3·5	3·5	0·7	2·7	2	1·5	3	1·5				0·7	3·1	2·4
	70	1·2	3·2	2	1·5	2·7	1·2	1·5	2·5	1	1·2	3·2	2	1·4	2·9	1·5
	60	1·1	2·6	1·5	1·5	2·7	1·2	1	2·3	1·3	1·2	2·8	1·6	1·2	2·6	1·4
	50	0·5	2·3	1·8	1·2	3	1·8	0·5	2	1·5	0·8	2	1·2	0·8	2·3	1·6
	40	0	2·5	2·5	0	2	2				0	2	2	0	2·1	2·1
60	75	1	3	2	2·2	3·5	1·3	1·7	3·2	1·5	1·5	3·5	2	1·6	3·3	1·7
	60	2	3·2	1·2	2·2	3·2	1·2	1·7	2·7	1	2·2	3·2	1	2	3·1	1·1
	50	1·5	2·7	1·2	2	3·2	1·2	1·5	2·5	1	2	3	1	1·8	2·9	1·1
	40	1	2·7	1·7	1·2	3	1·8	0·8	2	1·2	1·3	2·3	1	1·1	2·5	1·4
	30	0	3·5	3·5	0·5	2·5	2				0	2·5	2·5	0·2	2·8	2·6
50	65	1·5	3·5	2	2·5	4	1·5	2	3·5	1·5	2	4	2	2	3·7	1·7
	50	2·4	3·5	1·1	2·5	3·5	1·0	2	3	1	2·2	3·2	1	2·3	3·3	1
	40	1·7	3·2	1·5	2·2	3·5	1·3	1·5	2·5	1	2	3	1	1·8	3	1·2
	30	0·7	2·8	2·1	1·5	3·5	2	1·4	2·5	1·1	2	3	1	1·4	2·9	1·5
	20	0	2·6	2·6	0·8	2·8	2	0·5	2	1·5	—1	1·5	2·5	0·1	2·2	2·1

b) Centralstrahlen.

No. 5.	Erste Ordinaten	Zweite Ordinaten			Axenp. ab Vorderfläche	Entfernungen vom Axenpunkte			
	Versch.	V.-Fl.	I	II		V.-Fl.	I	II	Bst.
70	+ 2·2	7	8·6	9·7	2·659	4	5·6	6·7	1·1
60	+ 2	7	9·1	10·2	2·691	3·6	5·8	6·8	1·0
50	+ 1·7	7·1	9·5	10·5	2·781	3·5	5·9	6·9	1·0
0	+ 0·0	7·2	11·2	11·2	—	—	—	—	0·0
No. 6.									
70	+ 2·25	6·6	8	9·9	2·92	3·6	5·0	6·9	1·9
60	+ 2	7·0	9	10·1	2·79	3·5	5·5	6·6	1·1
50	+ 1·8	7·1	10	11·1	2·75	3	5·9	7·0	1·1
0	0·0	7·3	11·6	11·6	—	—	—	—	0·0
No. 7.									
70	+ 2·9	7·8	9·5	11	3·014	4·6	6·3	7·8	1·5
60	+ 2·7	8	10	11	2·982	4·2	6·2	7·2	1·0
50	+ 2·3	8·2	10·5	11·5	3·098	4	6·3	7·1	0·8
0	0·0	8·3	12·4	12·4	—	—	—	—	0·0
No. 8.									
70	+ 2·3	7·7	8·1	10·5	3·352	4·7	5·1	7·5	2·4
60	+ 2·2	7·7	8·4	10·5	3·26	4·2	4·9	7·0	1·1
50	+ 2·0	7·9	9·8	11·2	3·189	4·0	5·9	7·3	1·4
0	0·0	8·0	12·0	12	—	—	—	—	0·0
70	+ 2·3	7·5	8	10	3·352	4·5	5·0	7·0	2·0
70	+ 2·3	7·5	8	10	3·352	4·5	5·0	7·0	2·0
60	+ 2·1	7·7	8·9	10	3·26	4·2	5·4	6·5	1·1
50	+ 2·0	7·6	10·0	10·5	3·189	3·7	6·1	6·6	0·5
0	0·0	8·0	12·0	12·0	—	—	—	—	0·0

Drehpunkt bei 2·2 des Massstabs.

c) Centralstrahlen.

Entfernungen von der Vorderfläche.

	Gesammtmittel			Berechnet		
	I	II	Bst.	I	II	Bst.
70	1·2	2·85	1·65	1·276	2·604	1·328
60	1·9	3·0	1·1	1·742	2·862	1·120
50	2·35	3·35	1·0	2·357	3·264	0·907
0	4·1	4·1	0·0	4·01	4·01	0·0

d) Centralstrahlen.

Mittel aus 5. 6. 7. 8 (s. Taf. IX Fig. 4).

	Axenpunkte	Entfernungen vom Axenpunkte			Brennstrecke
		V.-Fl.	I	II	
70	2·98	4·3	5·3	7·1	1·8
60	2·93	3·9	5·6	6·8	1·2
50	2·95	3·6	6·0	7·0	1·0
0	Vordere Brennweite 4·1 von V.-Fl.				

e) Axenpunkte von der Vorderfläche.

	Mittel	Berechnet
70	2·98	2·781
60	2·93	2·917
50	2·95	3·019

f) Distanzen zwischen den vorderen u. hinteren Axenpunkten.

	Mittel	Berechnet
70	0·52	2·299
60	0·77	2·079
50	0·95	1·911

E. Die Lage der Brenngebilde im menschlichen Auge.

Die Form der Hornhautoberfläche wird gewöhnlich als diejenige eines Ellipsoides betrachtet. Doch betont schon Helmholtz, dass durch diese Annahme nur eine Annäherung ausgedrückt werden solle, und auch Woinow (Ophthalmometrie S. 38) meint, es sei nicht der Fall, dass die Hornhautkrümmung streng mathematisch einer Ellipse ähnlich sei. In der That lässt sie sich aber besser durch eine Ellipse als durch einen Kreis ausdrücken. Will man den teleologischen Gesichtspunkt als berechtigt anerkennen, so würde die Ellipsenform nur dann als zweckmässig angesehen werden können, wenn der Brechungsindex zu den Axen und zum Parameter in demjenigen Verhältniss steht, welches der ellipsoidischen Fläche die Fähigkeit verleiht, von einem unendlich entfernten Leuchtpunkte herkommende Strahlen homocentrisch zu brechen. Bei dem vorhandenen Brechungsindex der Hornhaut und den bisher durch Messungen ermittelten Krümmungsradien kann die gewöhnlich angenommene Hornhautellipse dieses nothwendige Verhältniss nicht aufweisen. Wenn das gewöhnlich angenommene Hornhautellipsoid der Homocentricitätsbedingung genügen sollte, so hätte der Index $= 1 : \varepsilon = a : e = 1 \cdot 855$ sein müssen. Sollten die Messungen, welche vorläufig noch nicht sehr zahlreich sind, auch in Zukunft keine grösseren Werthe für die excentrischen Krümmungsradien ergeben, so muss die Zweckmässigkeitsforderung der Homocentricität fallen gelassen werden. Die Hornhaut zeigt zwar auch dann günstigere Aberrationsverhältnisse als eine kugelige Fläche, aber von einer Homocentricität für bestimmte positive Entfernungen kann nicht mehr die Rede sein.

Da, wie gesagt, die Messungen an menschlichen Hornhäuten noch nicht sehr zahlreich sind, auch bedeutende individuelle Abweichungen ergeben haben und da die bei manchen Messungen angewandten Methoden nicht ganz frei von Bedenken sind, so wäre es möglich, dass wiederholte Messungen andere von den bisherigen abweichende Resultate lieferten, welche mit den Zweckmässigkeitsforderungen mehr im Einklang ständen. Rathsam ist es, nicht praejudicirend wie bisher zu verfahren durch Einsetzen der gefundenen Werthe in die Ellipsenformel, auf welche Weise natürlich eine Ellipse herauskommen muss.

Es können die einzelnen Augen für verschiedene Sehdistanzen eingerichtet sein; die einen erhalten vielleicht von Gegenständen in einer bestimmten Entfernung homocentrische Bilder, die anderen von solchen in grösserer. Bei den Augen mit ausserordentlicher Sehschärfe für die Ferne, welche z. B. die Jupitersmonde zu erkennen vermögen, müsste die homocentrische Ellipsenform vorhanden sein, weil diese für unendliche Entfernung homocentrische Vereinigung aller Strahlenbündel bewirkt. Für endliche Entfernungen des Leuchtpunktes sind die aplanatischen Linien Curven vierten Grades und die entsprechenden Flächen durch Rotation dieser Curven entstanden.

Damit ein etwaiger Aplanatismus der Hornhaut dem centralen Sehen wirklich zu Gute komme, muss die Brechung in der Linse gerade für die vom Bildpunkt der Hornhaut kommenden Strahlen homocentrisch sein und ausserdem die Netzhaut genau an dem Punkte der Axe sich befinden, wo das Linsenbild liegt. Die conjugirten Punkte sämmtlicher brechenden Medien müssen entsprechend angeordnet sein. Ob im Auge diesen idealen Forderungen genügt ist, lässt sich vorläufig noch nicht entscheiden; es soll hier nur auf die Möglichkeit homocentrischer Brechung im Auge und auf die Bedingungen, deren Erfüllung dabei nöthig ist, aufmerksam gemacht werden.

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der Form der Brenngebilde schräg einfallender Strahlenbündel im menschlichen Auge.

20. Die Brenngebilde im ruhenden Auge.

Die Fig. 2 Taf. X stellt die Brechung im menschlichen Auge dar, wenn wir die Hornhaut als eine durch Rotation der oben besprochenen Curve vierten Grades entstandene Fläche ansehen. Die punktirte Linie 1, 2, 3, 4, 5 HS ist ein Stück der Curve vierten Grades, die ausgezogene ist der Krümmungskreis des Scheitels HS um K_1. Die umstehende Tabelle enthält die zugehörigen Zahlen. Die beiden Pole oder Brennpunkte der Curve liegen der eine 200 mm vor, der andere 35 mm hinter HS. HS, O, $B_1 B_2$, M würden Scheitelpunkt, Brennpunkte und Mittelpunkt der Hornhautellipse sein. Die Krümmungsmittelpunkte der Linsenflächen sind K_2 und C. Ein Bündel paralleler Strahlen fällt unter einem Winkel $\lambda = 44^0$ 20 mit der Axe auf die Vorderfläche der Hornhaut. Von diesem Bündel wurden zwei Strahlen ausgewählt, erstens der homocentrische Strahl 3. 3. 3, welcher an der Hornhaut homocentrische Brechung erfahren würde, wenn er von einem 202·35 mm von 3 entfernten Leuchtpunkte herkäme, und zweitens der durch den Linsenscheitel gehende Strahl 5. S. 5. Von einem anderen Bündel paralleler Strahlen, dessen Einfallswinkel mit der Axe $\lambda = 66^0$ 54 betrug, wurde ebenfalls der homocentrische Strahl 1. 1. 1, welcher einen homocentrischen Bildpunkt aufzuweisen haben würde, wenn der Leuchtpunkt sich 202·5 mm von 1 befände, dargestellt und der durch den peripheren Theil der Linse laufende Strahl 4. 4. 4. Um Verwirrung der Figur zu vermeiden, ist der Linsenscheitelstrahl dieses Bündels fortgelassen und dafür der Linsenscheitelstrahl eines benachbarten, unter einem Winkel von 63^0 14 mit der Axe auf die Hornhaut auffallenden Bündels gezeichnet. Die homocentrischen Strahlen sind ausgezogen, (nach der Brechung an der vorderen Linsenfläche lang gestrichelt,) die Linsenscheitelstrahlen fein punktirt, der Linsenlateralstrahl kurz gestrichelt. Die stehenden (ersten) Brennlinien sind durch einen Punkt, die liegenden (zweiten) durch einen Strich kenntlich gemacht, die Brennstrecken durch Verstärkung der Strahlen hervorgehoben. Neben den Brennstrecken nach der Brechung an der Hornhaut steht ein H, diejenigen nach der Brechung an der Vorderfläche der Linse sind mit L, diejenigen nach der Brechung an der Hinterfläche mit l bezeichnet. Die letzteren versinnlichen uns die eigentlich in Frage kommende Form und Lage des Brenngebildes. Die Linie FN bedeutet die Lage der Netzhaut. An den Strahlen 1 und 3 befinden sich nach der Brechung an der Hornhaut die liegenden Brennlinien vor den stehenden, — das Brenngebilde hat also die, Taf. VI Fig. 7, dargestellte Form, — die übrigen Brennlinien halten die gewöhnliche Reihenfolge ein.

Die Brechungsindices.

Als Brechungsindex der Hornhaut und des Humor aqueus habe ich 1·338 gewählt. Helmholtz und Listing nehmen 1·3376, Krause und Andere höhere Werthe an. Ueber den Totalindex der Linse liegen folgende Angaben vor:

Listing	Young	Zehender	Woinow	Helmholtz
1·4545	1·4385	1·4393	1·4387	1·4371.

Ich wähle für meine Darstellung das Mittel 1·438. Für die verschiedenen Schichten der Linse gelten folgende Zahlen:

Aeusserste	Mittlere	Kern.
1·3835	1·4058	1·4106.

Die Kenntniss dieser Werthe würde genügen, um die Brechung für Axenstrahlen festzustellen, und auch hinsichtlich schiefer Bündel, wenn man nur die durch den optischen Mittelpunkt gehenden Centralstrahlen berücksichtigte, alle anderen vernachlässigte. Letzteres ist aber nicht gestattet, vielmehr haben auch die anderen Strahlen, welche das Centrum nicht passiren, eine grosse Bedeutung. Diese Strahlen durchsetzen nur einen Theil der Linse und einen Theil der Schichten, einzelne nur die am schwächsten brechenden, andere auch die von mittlerer Brechkraft. Für diese Strahlen kann weder der Totalindex noch der Index einer einzelnen Schicht Geltung haben, sondern wir müssen einen Sammelindex, einen auf die durchlaufenen Schichten sich beschränkenden Totalindex haben (vgl. oben S. 71. 72 u. 85). Derselbe wird niedriger als der wirkliche Totalindex und höher als der Index der einzelnen durchsetzten Schichten sein. Solcher Sammelindices habe ich zwei ausser dem für die Centralstrahlen gültigen Totalindex gebraucht.

Centralstrahlen:	Scheitelstrahlen:	Radialstrahlen:
1·438	1·43	1·4.

Es würde keine erheblichen Schwierigkeiten haben, einen Strahl rechnend durch die menschliche Linse hindurch zu verfolgen, wenn wir eine genaue Kenntniss von der Zahl und den Brechungsindices der Schichten und von der Lage und Krümmung ihrer Grenzflächen hätten. Da wir über dieselbe nicht verfügen und voraussichtlich auch so bald nicht verfügen werden, müssen wir uns mit den Anhaltspunkten begnügen, welche uns die Vergleichung geschichteter Linsen mit homogenen und die experimentelle Untersuchung thierischer Linsen ergaben. Oben (S. 74) haben wir gesehen, dass Schichtung die Astigmasie nicht vermindert. Von Wichtigkeit ist erstens die Thatsache, dass die Brennstrecke des Centralstrahles in der geschichteten Linse keinenfalls kürzer ist als in der homogenen Linse, zweitens, dass an den Scheitel- und Radialstrahlen Lage und Länge der Brennstrecke für beide Linsen fast vollständig übereinstimmen, drittens, dass diese Uebereinstimmung noch vergrössert wird, wenn wir einen dem Index der Schale sich nähernden Sammelindex wählen. Endlich — können wir mit Rücksicht auf das Auge hinzufügen — verlieren die Unterschiede hier noch an Bedeutung in Folge der verhältnissmässig geringen Differenz zwischen den Indices der Linse und des Glaskörpers.

Wenn wir die erwähnten Momente berücksichtigen, können wir uns wohl für gesichert halten, dass unsere Darstellung von dem Vorgange der Brechung schiefer Strahlenbündel im Auge jedenfalls kein ungünstigeres Bild rücksichtlich der Homocentricität entwirft, als es der Wirklichkeit entspricht.

Für die homocentrischen Strahlen, welche nahezu Centralstrahlen sind, wurde in Fig. 2 Taf. X der Totalindex benutzt $= 1 \cdot 438$, für die übrigen Strahlen der Index $1 \cdot 43$, sodass das Verhältniss des Index vom Humor aqueus und Glaskörper zu den betreffenden der Linse war: einmal $= 1 \cdot 075$ und zweitens $= 1 \cdot 0687$. Die Wahl dieser Indices verlegt die Schnittpunkte der Strahlen in die Netzhaut oder in unmittelbare Nähe derselben und lässt Brenngebilde entstehen, welche alle Merkmale zeigen, die wir als charakteristisch für dieselben erkannt haben. Das Brenngebilde des $44^0 20$-Bündels wird durch die Brennstrecken l_5 und l_3 versinnlicht, dasjenige des $66^0 54$-Bündels durch die Brennstrecken l_1 und l_4, wobei auch noch die Brennstrecke l_2 des Linsenscheitelstrahles $63^0\ 14$ zu berücksichtigen ist. Fig. 2 a giebt eine schematische Darstellung dieses Brenngebildes; es ist auch der Linsenscheitelstrahl mit eingetragen.

Tabelle XXV.

Auge. Hornhaut: Rotationsfläche einer Curve IV. Grades.

	Homocentrische Strahlen.		Linsenscheitelstrahlen.		Linsen-lateralstrahl.
	$\lambda = 44^0 20$	$\lambda = 66^0 54$	$\lambda = 63^0 14$	$\lambda = 44^0 20$	$\lambda = 66^0 54$
Grade bei F	5^0	8^0	6^0	4^0	4^0
Radiusvector	34·53	33·86	'34·35	34·70	34·70
λ	44^0 2	66^0 54	63^0 14	44^0 20	66·54
α	22^0 27	34^0 7	37^0 48	26^0 50	49^0 24
β	16^0 35	24^0 47	27^0 16	19^0 43	34^0 34
n	1·338	1·338	1·338	1·338	1·338
t	4·0066	5·587	4·509	4·011	5·488
φ	35^0 5	50^0 36	52^0 42	37^0 13	63^0 2
ψ	32^0 20	45^0 59	48^0 6	34^0 28	56^0 30
$n_1 : n_2$	1·075	1·075	1·0687	1·0687	1·0687
δ	4·1562	4·909	4·214	4·006	2·890
η	17^0 15	26^0 4	16^0 35	13^0 24	4^0 10
ϑ	18^0 35	28^0 11	17^0 45	14^0 21	4^0 27
$\mathfrak{P}_2$	30·63	30·1	27·95	29·36	23·93
$\mathfrak{P}_1$	30·96	30·67	25·12	27·65	17·24
$\mathfrak{B}$ſt.	— 0·33	— 0·57	2·83	1·71	6·69
p_2	23·09	21·58	20·00	22·3	15·75
p_1	22·68	19·61	16·67	20·58	9·783
bst.	1·41	1·97	3·33	1·72	5·967
P_2	14·33	12·75	12·56	14·23	10·57
P_1	13·62	10·64	9·995	12·85	5·997
Bst.	0·71	2·11	2·565	1·38	4·573

Bevor wir die Besprechung der Form des Brenngebildes im Auge fortsetzen, wollen wir die Lage desselben noch unter Voraussetzung einer anderen Hornhautflächenkrümmung untersuchen. Ein dritter Fall, nämlich derjenige des üblichen Hornhautellipsoids, kommt im folgenden Abschnitt zur Sprache, in welchem auch der Einfluss der Accommodation erörtert werden soll. Wenn die Hornhautkrümmung diejenige der homocentrischen Ellipse (Fig. 2 Taf. XII) ist, so werden die paraxialen Strahlen alle im zweiten Brennpunkte der Ellipse vereinigt. Gezeichnet ist der Krümmungskreis des Scheitels um K_1 mit K_1HS als Radius. Die ausserhalb dieses Kreises mar-

kirten vier Punkte gehören der homocentrischen Ellipse mit den Brennpunkten B_1 und B_2, dem Parameter $K_1 HS$ und dem Index $n = 1 \cdot 338$ an.

Der Winkel zwischen gebrochenem Strahl und der Axe ist jedesmal gleich dem Einfallswinkel, weniger dem Brechungswinkel, d. h. $\sphericalangle HS . B_2 70^0 = \alpha - \beta$. $B_2 70^0$ ist der eine Radiusvector, der andere $B_1 70^0$. Der Winkel $B_1 70^0 B_2$ wird durch die Normale halbirt. Ziehen wir noch den einfallenden Strahl des schiefen Bündels, so müssen immer die Einfallswinkel des paraxialen und schiefen Strahles für denselben Einfallspunkt gleich sein, weil die Brechungswinkel gleich den beiden Hälften des Winkels $B_1 70^0 B_2$ sind. Der Winkel des gebrochenen schiefen Strahles mit der Axe $HS . B_1 70^0$ ist $= 2\beta + (\alpha - \beta) = \alpha + \beta$. Der Winkel des einfallenden Strahles mit der Axe $\lambda = \alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha$. Auf diese Weise findet man leicht denjenigen Strahl des schiefen Bündels, welcher nach der Brechung durch den Brennpunkt B_1 geht.

Alle Strahlen, welche durch den Brennpunkt einer Ellipse gehen, sind homocentrisch, wenn der Leuchtpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

Auf die Vorderfläche der Hornhaut fallen vier Strahlenbündel unter Winkeln von 90°, 70°, 46° 30 und 20° 8. Von den gebrochenen Strahlen sind nur die homocentrischen gezeichnet. Die Bildpunkte der in unendlicher Entfernung befindlichen Leuchtpunkte liegen nach der Brechung an der Hornhaut in der Curve B_2HHHH und sind mit dem Buchstaben H und der Gradzahl bezeichnet. Die Brechung an der Vorderfläche der Linse ist keine homocentrische mehr. Die Strahlen nach dieser zweiten Brechung sind punktirt. Die zweiten Brennlinien liegen in der Curve L_0LLLL, die ersten, durch einen Punkt kenntlich gemacht, sind ebenfalls durch eine Curve verbunden. Die Curve Nllll enthält die zweiten Brennlinien nach der Brechung an der Hinterfläche der Linse. Die ersten Brennlinien, Punkte, sind mit den zweiten durch die stärker gezeichneten Brennstrecken verbunden. Die Curve NNN deutet die Lage der Netzhaut an.

Betrachten wir die Brennstrecken des 90°- und 70°-Bündels, so sind die homocentrischen Strahlen die excentrischsten der Bündel, welche noch eintreten. Die Brennstrecken aller mehr nach dem Hornhautscheitel zu einfallenden Strahlen rücken weiter dem Augeninneren zu. Die Brennstrecken des 46° 30- und 20° 8-Bündels haben noch mehr nach aussen und mehr nach innen gelegene Brennstrecken neben sich, erstere von peripherer, letztere von centraler eintretenden Strahlen herrührend. Dies geht aus der Erläuterung der Fig. 2 Taf. X hervor. Besonders die näher dem Hornhautscheitel eintretenden Strahlen werden der Natur der Sache nach fast ganz identisch gebrochen in dem jener, wie in dem der jetzt besprochenen Figur zu Grunde liegenden Falle. Das Resultat ist stets das schlanke in die Länge gezogene Brenngebilde der Fig. 2 a Taf. X.

Denken wir uns von den Schnittstellen der Brenngebilde mit der Retina aus Parallelen zu den zugehörigen einfallenden Strahlenbündeln gezogen, so schneiden dieselben alle die Axe in Punkten, welche auf der Ausdehnung eines halben Millimeter, vom Hinterpole der Linse ab gerechnet, liegen, also in unmittelbarer Nähe des hinteren Knotenpunktes und des Krümmungsmittelpunktes des Hornhautscheitels. Die Retinastelle, auf welche das von einem Leuchtpunkte ausgehende Strahlenbündel trifft, lässt sich also ermitteln, indem man eine Gerade vom Leuchtpunkt nach dem Grenzpunkt des vorderen und mittleren Drittels der Augenaxe zieht und dieselbe bis zur Retina verlängert. Diese Stelle ist das eigentliche Centrum der Richtungslinien, jedoch kein mathematischer Punkt.

Man stelle folgenden Versuch an. Bei unbeweglichem Kopfe richtet man ein Auge auf einen Fixationspunkt A. Seitlich nach aussen bringt man in einiger Entfernung eine schmale senkrechte Lichtlinie an und schiebt dann einen dünnen Stab zwischen Auge und diese Lichtlinie, so dass letztere verdeckt wird. Fixirt man nun die Lichtlinie, ohne den Kopf zu bewegen, so verdeckt der Stab dieselbe nicht mehr; die Gesichtslinie geht auswärts an dem Stabe vorbei. Es zeigt dies, dass die Verbindungslinie: Lichtlinie — Stab bei der Fixation des Punktes A auf einen vor dem Drehpunkt auf der Augenaxe gelegenen Punkt zielte, welcher aber nicht das eben besprochene Centrum der Richtungslinie, sondern augenscheinlich jedesmal der Axenpunkt des Hauptstrahles des einfallenden Strahlenbündels ist. Diese Axenpunkte liegen im vorderen Augenabschnitt vor der Linse und sind für jedes einfallende schiefe Bündel verschieden. Jenes Centrum der Richtungslinien ist Versuchen nicht zugänglich. Im Archiv für Ophthalmologie XXII 4. S. 35 habe ich Versuche mitgetheilt, durch Zeigen die Projectionsrichtungen festzustellen. Dieselben genügten allerdings, um nachzuweisen, dass wir nicht von einem cyklopischen Auge aus projiciren, sondern die Bilder stets auf ein Auge beziehen, doch konnte diese Methode selbstverständlich über die genaue Lage eines etwaigen Projectionscentrum auf der Augenaxe keinen Aufschluss ergeben.

Tabelle XXVI.

Auge. Hornhaut: Rotationsfläche der homocentrischen Ellipse ($a = 17\cdot69$; $b = 11\cdot75$; $e = 13\cdot22$).

Homocentrische Strahlen.

λ	0	20° 8	46° 30	70°	90°
α		10° 4	23° 15	35°	45°
β		7° 31	17° 9	25° 23	31° 54
n	1·338	1·338	1·338	1·338	1·338
N		7·774	8·186	8·643	9·199
g [1]		0·5786	0·7304	1·014	1·514
r [2]		4·506	4·986	5·702	6·679
t [3]	3·6	3·601	3·878	4·131	4·175
v [4]		3·446	3·726	4·262	4·992
χ [5]		17° 35	40° 24	60° 23	76° 54
φ		16° 1	36° 17	52° 32	62° 47
ψ		14° 52	33° 24	37° 35	55° 49
$n_1 : n_2$	1·075	1·075	1·075	1·075	1·075
γ [6]		1° 34	4° 7	7° 51	14° 7
δ_1 [7]	3·7	0·905	1·108	1·571	2·504
δ_2		0·948	1·179	1·659	2·597
δ_3		3·609	3·027	3·378	3·819
ω [8]		16° 46	37° 31	55° 26	69° 56
η		9° 25	19° 19	27° 49	33° 13
ϑ		10° 7	20° 50	30° 7	36° 5
k [9]		8·894	9·039	8·966	8·807
$\mathfrak{P}$	30·91	30·79	30·41	29·68	28·7
p_2	24·36	24·11	22·96	21·15	19·39
p_1		24·03	22·28	18·69	14·63
bst.	0	0·08	0·68	2·46	4·76
P_2	15·5	15·41	13·53	12·34	10·2
P_1		15·22	12·57	9·877	7·563
Bst.	0	0·19	0·96	2·46	2·64

(The value 3·7 is bracketed for δ_1, δ_2, δ_3.)

[1] g ist die Entfernung des Axenpunktes des einfallenden Strahles von B_1.

[2] r ist der Radiusvector von B_1 aus.

[3] t ist die Weglänge in der vorderen Kammer.

[4] v ist die Entfernung des Axenpunktes der Normale von B_1.

[5] χ ist der Winkel zwischen Strahl und Axe nach der ersten Brechung.

[6] γ ist der Winkel zwischen vorderem Linsenradius und der Axe.

[7] Weglänge des Strahles in der Linse δ_1 nach erster Brechung, δ_2 und δ_3 nach zweiter Brechung.

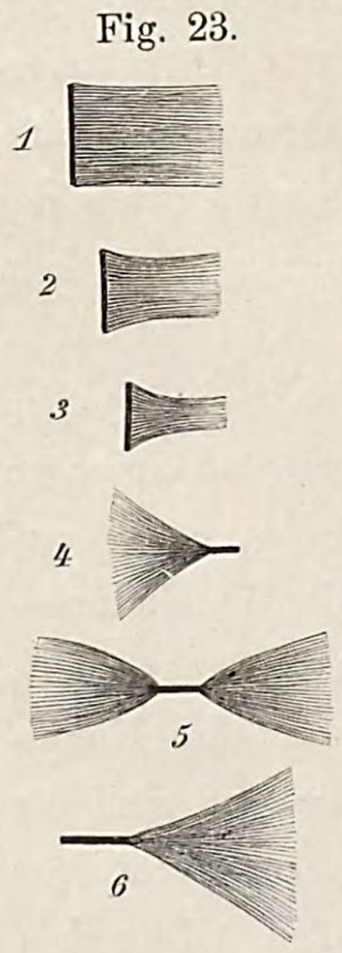
[8] ω ist der Winkel des Strahles mit der Axe nach der zweiten Brechung.

[9] k ist die Entfernung des Axenpunktes des Strahles nach der zweiten Brechung vom Krümmungsmittelpunkt der Linsenvorderfläche.

Fahren wir jetzt wieder mit der Besprechung der allgemeinen Form des Brenngebildes im Auge fort. Die drei stehenden Brennlinien $b_4 b_2 b_1$ Fig. 2 a Taf. X bilden die äussere Caustica, die entsprechenden $a_4 a_2 a_1$ die innere. Die räumliche Form dieses Brenngebildes stellen schematisch Fig. 5 Taf. VI und die stereoskopischen Fig. 2 und 3 Taf. XI dar. Es handelt sich noch darum, sich über die verschiedenen Ausdehnungen des Brenngebildes ein Urtheil zu verschaffen. Sehen wir die Strecke 1—4 auf der Hinterfläche der Linse als Durchmesser der Basis des Lichtkegels an, so erhalten wir als Höhen der drei stehenden Brennlinien:

b_4	b_2	b_1
0·65 mm	0·3 mm	0·25 mm
(oder $Q_3 b_3$	$Q_2 b_2$	$Q_1 b_1$ der Fig. 5 Taf. VI).

Fig. 23.



Die vertikale Ausdehnung des Brenngebildes am Orte der Netzhaut würde somit etwa 0·3 mm betragen, während die horizontale hier nur 0·1 mm ausmachte.

Nimmt man den Durchmesser eines Zapfens zu 0·005 mm an, so würde sich das Bild eines Leuchtpunktes immerhin über 60 Zapfenbreiten erstrecken. Denken wir uns durch das Brenngebilde Fig. 5 Taf. VI eine grössere Anzahl Querschnitte parallel der Netzhaut gelegt, z. B. W und A. Es seien solcher Querschnitte sechs gelegt und zwar durch die Orte der sechs Brennlinien. Die Zerstreuungsfiguren, welche denselben entsprechen, sind in Fig. 23 schematisch zur Darstellung gebracht. In dem am nächsten gegen die Hinterfläche der Linse gelegenen Querschnitt 1 erscheinen zuerst die Strahlen des Linsenlateralstrahles zur senkrechten 0·65 mm langen Brennlinie $b_3 Q_3$ (Taf. VI Fig. 5) b_4 (Taf. X Fig. 2 a) zusammengefasst, gegen die Augenaxe hin schliesst sich an diese scharfe Lichtlinie ein diffuser Schein an von nahezu gleichem Durchmesser bezüglich Höhe und Breite. Querschnitt 2 zeigt die vertikale

0·3 mm lange Brennlinie des Linsenscheitelstrahles, der Schein nach innen von dieser scharfen Lichtlinie ist in vertikaler Richtung schmaler geworden. Der 3. Querschnitt weist am äusseren Rande die scharfe 0·25 mm messende Brennlinie des homocentrischen Strahles auf. Der Schein hat der Höhe nach noch mehr verloren, um sich im Querschnitt 4 zur horizontalen Brennlinie, von einer Länge = 1·1 mm, a_4 (Taf. X Fig. 2 a) oder a_3 (Taf. VI Fig. 5) zu verdichten, während sich links davon die vormals vertikale Brennlinie in einen Schein aufgelöst hat. In der Mitte des Querschnitts 5 liegt als scharfer Lichtstreifen die horizontale Brennlinie $a_2 = 0 \cdot 39$ mm des Linsenscheitelstrahles mit Lichthof zu beiden Seiten. Endlich im 6. Querschnitt erscheint der Lichthof links zur horizontalen Brennlinie = 0·3 mm des homocentrischen Strahles verdichtet, woran sich nach der Axe zu ein grosser Lichthof anschliesst. In der ganzen Ausdehnung des Brenngebildes haben wir somit auf jedem Querschnitt eine scharfe Lichtlinie, deren Länge nicht unter 0·25 mm sinkt, nicht über 1·1 mm steigt und im Durchschnitt 0·5 mm beträgt, nebst einem mehr oder weniger diffusen, sich nach einer oder beiden Seiten hin ausdehnendem Lichthofe. Zu berücksichtigen ist noch, dass die horizontalen Brennlinien schräg zu den Querschnitten stehen und daher nicht in ihrer ganzen Länge in denselben erscheinen, so dass die ihnen entsprechenden scharfen Lichtlinien an Länge kaum die vertikalen übertreffen werden. In der ganzen, 7 mm messenden, Ausdehnung des Brenngebildes werden wir daher auf jedem Querschnitt einer etwa 0·3 mm langen hellen scharfen, vertikal oder horizontal liegenden Lichtlinie begegnen, an welche sich ein verschieden geformter Lichthof anschliesst, der ebenfalls an jedem Punkte seiner Ausdehnung die verschiedensten Lichtintensitäten zeigen kann. Ueber das Brenngebilde hinaus nach der Linse zu oder nach auswärts verschwinden die hellen Lichtlinien gänzlich und vergrössern sich allmählich die Zerstreuungshöfe. Innerhalb des Brenngebildes sind die Uebergänge ebenfalls ganz allmählich. An welcher Stelle des Brenngebildes die Netzhaut thatsächlich zu liegen kommt, kann augenscheinlich von keinem grossen Einfluss auf die Deutlichkeit des Netzhautbildes sein.

Denken wir uns eine in der Einfallsebene gelegene continuirliche Leuchtlinie, so wird ihr Bild am deutlichsten sein, wenn der auffangende Schirm sich am Orte der zweiten Brennlinien befindet. Besteht die Linie aber aus distincten Leuchtpunkten, so wird das Bild dieser Punkte am Orte der zweiten Brennlinien ineinander fliessen, dagegen am Orte der ersten als eine Reihe getrennter senkrecht zur Einfallsebene stehender kleiner Linien erscheinen. Umgekehrt hat eine senkrecht zur Einfallsebene stehende continuirliche Leuchtlinie ihr schärfstes Bild auf dem Querschnitt durch die ersten Brennlinien, während so geordnete getrennte Leuchtpunkte auf diesem Querschnitte ineinander fliessen, am Orte der zweiten Brennlinien getrennt bleiben und als kleine der Einfallsebene parallele Linien wahrgenommen werden. Wie sich die Bilder anderer Gruppen von Leuchtpunkten gestalten, ist aus Vorstehendem leicht abzuleiten.

Von einem Bestreben, die Astigmasie schiefer Bündel im thierischen Auge zu beseitigen oder doch zu vermindern, ist nicht die geringste Spur aufzufinden. Andererseits wirken alle vorgefundenen Einrichtungen dahin, den Brenngebilden eine schlanke in die Länge gezogene Gestalt zu verleihen. Besonders trägt der Fortfall des rückkehrenden Armes der Caustica dazu bei. Die Folge davon ist, dass seitlich gelegene Gegenstände, mögen sie ferner oder näher liegen, mit nahezu gleicher Deutlichkeit sich auf der Netzhaut abbilden, dass also das ruhende Auge, wenn es in die Ferne blickt, hinreichend deutlich für die Orientirung auch nähere Objekte sieht.

Die Hauptaufgabe des peripheren Sehens besteht darin, auf seitlich gelegene bemerkenswerthe Dinge die Aufmerksamkeit hinzulenken. Dieser Aufgabe genügt dasselbe so gut, dass es bekanntlich leichter ist, einen weniger hellen Stern wahrzunehmen und auch Gegenstände auf dem Boden aufzufinden unter Benutzung des indirekten Sehens als des direkten. Ist der Ort des Gegenstandes nicht bekannt, so wird die genaue Einstellung des Accommodationsapparats zur Unmöglichkeit und beim centralen Sehen verbreitet sich das von einem Leuchtpunkte ausgehende Licht in bedeutenden Zerstreuungskreisen über die Retina. Genaue Accommodation würde die Lichtmenge auf einen Zapfen vereinigt haben, welche jetzt 80 und darüber trifft.

Periskopie des Auges, d. h. eine solche Einrichtung desselben, dass auch die periphere Netzhaut von in bestimmter Entfernung liegenden Leuchtpunkten scharfe Bilder bekäme, würde das periphere Sehen in dieselbe Lage versetzen wie das centrale, und zu dem eigentlichen Geschäft des Aufsuchens und Hinlenkens ungeschickt machen. Es würde bei jeder Einstellung des Auges nur von in bestimmter Entfernung befindlichen Objekten Eindrücke liefern können. Gerade das Vorhandensein der Brenngebilde ist es, welches bewirkt, dass das indirekte Sehen von Gegenständen in den verschiedensten Entfernungen bei beliebiger Einstellung des Auges gefangen wird, um dann seinerseits das centrale Sehen auf die wichtigen Objekte hinzulenken. Die im Vorausgehenden entwickelten Verhältnisse müssen daher auch auf unsere Anschauungen von der Accommodation und dem Akt des Sehens überhaupt ändernd einwirken. Zur Klarstellung dieser Punkte sind die Figuren 3 und 4 Taf. X bestimmt.

21. Die Brenngebilde im accommodirten Auge.

In Fig. 3 ist als Querschnitt der Hornhaut die übliche Hornhautellipse angenommen. Die zugehörige Tabelle enthält die betreffenden Zahlen. H S und O sind die Scheitelpunkte, B_1 und B_2 die Brennpunkte, M der Mittelpunkt der Hornhautellipse und K_1 der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels H S; K_2 und C sind die Krümmungsmittelpunkte der ruhenden Linse, K_3 derjenige der Vorderfläche der accommodirten. S ist der vordere Scheitel der ruhenden, A derjenige der accommodirten Linse. A liegt 0·4 mm vor S. Die Grösse einer Pupille von mittlerer Weite (4 mm) und einer solchen von grösserer (6 mm) ist in geeigneter Weise kenntlich gemacht. Auf die Hornhaut fallen drei dünne Bündel paralleler Strahlen 1, 2, 3 unter Winkeln von 70°, 46° 30, 20° 8 mit der Axe. Sie zielen nach den Axenpunkten a 1, 2, 3; die an der Hornhaut gebrochenen Strahlen treffen auf die Linse am Scheitel derselben in der Mitte der Pupille. Die Brennstrecken nach der Hornhautbrechung sind wiederum mit H bezeichnet, nach der Brechung an der vorderen Linsenfläche mit L, an der hinteren mit l. Für den Strahl 20° 8 ist nur das schliessliche Resultat in Gestalt der letzten Brennstrecke berücksichtigt. Die Linsenscheitelstrahlen haben uns hier die ganzen Bündel zu repräsentiren, wozu sie am besten taugen, weil sie die Axe des in die Pupille eindringenden Strahlenbündels darstellen. Es sei auch daran erinnert, dass die Scheitelstrahlen wenig anders in geschichteten Linsen gebrochen werden als in homogenen, besonders wenn ein die Mitte zwischen dem Index des Kernes und demjenigen der Schale haltender Brechungsexponent gewählt wird. Was die Länge der Brennstrecke betrifft, welche am 70°-Strahl 3·672 mm beträgt, so erreicht dieselbe nicht die Ausdehnung des Gesammt-Brenngebildes Fig. 2 a, bei welchem auch die Brennstrecken des Central- und Radialstrahles berücksichtigt sind. Es ist aber zweckmässig, nicht bis zur äussersten Grenze zu gehen, damit die Deduktionen auch für engere Pupillen Gültigkeit haben und damit der von uns in Rechnung gebrachte Grad homocentrischer Brechung eher den wirklich vorhandenen übertreffen möge, jedenfalls aber nicht hinter demselben zurückbleibe.

	Länge der Brennlinien in mm:						Länge der Brennstrecke in mm:		
	70°	(Zapfenbreiten)	46° 30	(Zapfenbreiten)	20° 8	(Zapfenbreiten)	70°	46° 30	20° 8
I.	0·45	(90)	0·19	(38)	0·044	(8·8)	3·672	1·79	0·46.
II.	0·65	(130)	0·22	(44)	0·046	(9·2)			

Innerhalb der Brennstrecken kann augenscheinlich der Ort der Netzhaut unbeschadet der überhaupt möglichen Bildschärfe beliebig sein. Ueberall wird sie von einer scharfen vertikalen oder horizontalen Lichtlinie und einem Zerstreuungshof getroffen werden, und wird die Länge der Lichtlinie innerhalb der Brennstrecke sehr wenig wechseln.

Wenden wir uns jetzt zur accommodirten Linse. Die Vorderfläche rücke um 0·4 mm vor, ihr Krümmungsradius sei = 6 mm; die geringe Krümmungsänderung der Hinterfläche drückt sich durch Ver-

kürzung des Radius von 6 auf 5·5 mm aus. Das Auge ist nun auf einen Punkt 153·1 mm = 5·7 Zoll vor der Hornhaut eingestellt. Ein der Axe paralleles von einem in unendlicher Entfernung gelegenen Leuchtpunkte herkommendes Strahlenbündel hat seinen Bildpunkt F a 13·66 mm hinter der Linse und 1·84 mm vor der Netzhaut. Die Lage der Brennstrecken im accommodirten Auge ist dann auch für ein 70°- und 46° 30-Bündel paralleler aus dem Unendlichen kommenden Strahlen berechnet. Diese mit a_1 und a_2 bezeichneten punktirt gehaltenen Brennstrecken sind in Folge der verstärkten Brechwirkung der Linse nach Innen gerückt. Der Uebersichtlichkeit halber ist der Strahlengang nicht gezeichnet. Wir denken uns die ersten Brennlinien von a_1 und a_2 mit F a durch eine Curve verbunden und eine andere durch F a und die zweiten Brennlinien gezogen. Es zeigt sich, dass die Netzhaut von 50° ab nach aussen im stark accommodirten Auge sich noch innerhalb der Brenngebilde befindet, welche von unendlich entfernten Leuchtpunkten entworfen werden. Die zweite Brennlinie des 70°-Bündels liegt noch erheblich hinter der Netzhaut, diejenige des 46° 30-Bündels in nicht bedeutender Entfernung vor derselben. Bei weniger starker Accommodation kommt natürlich auch noch ein Theil der centraleren Netzhaut innerhalb der Brennstrecken zu liegen; weniger entfernte seitliche Leuchtpunkte entwerfen ihre Brenngebilde auch noch bei stärkster Accommodation im Bereich der Netzhaut.

Tabelle XXVII.

Auge mit ellipsoidischer Hornhaut.

Die Brennlinien, welche einem im Unendlichen liegenden leuchtenden Objektpunkte entsprechen im:

	1) Ruhenden Auge					2) (Auf 153·1) Accommodirt. Auge		
Winkel mit der Axe λ =	70°	nicht verminderter Totalindex d. Linse	46° 30	20° 8	0	0	46° 30	70°
Ordinate y	4·12		2·56	1·08				
Abscisse aus M, x =	9·863		10·58	10·93				
Radius r	8·775		8·177	7·835	7·809		wie im ruhenden Auge	
Subnormale s	6·992		7·504	7·754				
Normale	8·12		7·93	7·831				
α	39° 30		27° 40	12° 13				
β	28° 23		20° 18	9° 6				
n_1	1·338		1·338	1·338	1·338	1·338		
t	4·86		4·02	3·687	3·6	3·22	3·62	4·04
$n_1 : n_2$	1·0687	1·075	1·0687	1·0687	1·075	1·075	1·0687	1·0687
φ	58° 39	58° 39	39° 16	17° 2			36° 30	52° 59
ψ	53° 3	52° 37	36° 19	15° 54			33° 49	48° 20
δ	4·36	4·3	4·056	3·751	3·7	4·08	4·411	4·9426
η	18·9	17° 44	12° 54	6° 2			11° 13	16° 15
ϑ	19° 27	19° 7	13° 48	6° 27			12°	17° 24
$\mathfrak{P}_2$	26·8		28·73	30·5	30·91	30·91	wie im ruhenden Auge	
$\mathfrak{P}_1$	22·42		26·06	29·73				
Bst.	4·38		2·67	0·77				
p_2	18·49	18·28	21·74	24·02	24·36	22·12	19·85	17·14
p_1	13·98	13·84	19·33	23·37			17·23	12·38
bst.	4·51	4·44	2·41	0·65			2·62	4·76
P_2	12·06	11·1	13·89	15·56	15·5	13·66	12·205	9·935
P_1	8·388	7·736	12·1	15·1			10·3	6·258
Bst.	3·672	3·364	1·79	0·46			1·905	3·677

22. Terminantes conjugatae und Spatium conjugatum.

Es handelt sich nun darum, die Folgerungen zu entwickeln, welche sich aus diesem Resultat, das allen denjenigen, die gewohnt sind, als äusserstes Ziel der Zweckmässigkeit und Vollkommenheit möglichst vollständige Periskopie des Auges zu betrachten, gewiss unerwartet ist, für den Sehakt ergeben. Die Fig. 4 dient zur Erläuterung dieser Verhältnisse, die Rechnungsergebnisse finden sich in der zugehörigen Tabelle. Wir gehen zunächst vom ruhenden Auge aus.

Bezüglich der brechenden Medien des Auges entspricht der Fovea ein im Unendlichen auf der Axe gelegener Punkt als conjugirter. Zu jedem Punkt der peripherischen Netzhaut gehören nun in Folge der astigmatischen Brechung, welche gewissermassen zwei verschiedene Systeme brechender Medien darstellt, zwei conjugirte Punkte, der eine nähere, sobald wir die Brechung in der Einfallsebene betrachten, der zweite fernere, wenn es sich um die Brechung im dazu senkrechten Meridian handelt. Die Orte dieser conjugirten Punkte bilden zwei conjugirte Flächen, welche den Fixationspunkt gemeinsam haben. Der zwischen beiden Flächen liegende Raum soll Spatium conjugatum, der der Netzhaut conjugirte Raum heissen. Die Grenzflächen wollen wir Terminans anterior und posterior nennen. Wäre die Netzhaut mit leuchtenden Punkten erfüllt, so würde die Gesammtheit der Brennstrecken den conjugirten Raum ausmachen; umgekehrt senden alle in demselben befindlichen Leuchtpunkte Strahlen aus, deren Brenngebilde im Auge so liegen, dass die Netzhaut einen Querschnitt durch sie macht, näher oder ferner den ersten oder zweiten Brennlinien.

Die Fig. 4 verhält sich reciprok zur Fig. 3, die Grössenverhältnisse jedoch wie 1 : 40, da erstere der Wirklichkeit gegenüber 4mal verkleinert, letztere dagegen 10mal vergrössert ist. Die Augen R und L sehen parallel geradeaus. Vom rechten Auge ab sind die 70°-, 46° 30- und 20° 8-(Linsenscheitel-)Strahlen gezogen, und auf denselben die Punkte $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ berechnet, welche den Netzhautpunkten, die von den gebrochenen Strahlen im Auge getroffen werden, bezüglich des Meridians der Einfallsebene (horizontal) conjugirt sind. Alle der Netzhaut bezüglich des dazu senkrechten (vertikalen) Meridians conjugirten Punkte liegen im Unendlichen, so dass es also im ruhenden Auge nur eine Terminans anterior F $\varphi_3\,\varphi_2\,\varphi_1$ (— + —) giebt. Alles nach aussen von dieser Linie, resp. wenn man sie sich um die Axe RF rotirt denkt, von dieser Fläche gehört dem Spatium conjugatum an. Alle jenseits dieser Terminans liegenden Leuchtpunkte erzeugen im ruhenden Auge so gelegene Brenngebilde, dass die Netzhaut dieselben innerhalb ihrer Ausdehnung quer durchschneidet. Die Entfernungen der Punkte $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$ von R, der Hornhaut des rechten Auges, ergeben sich aus den Stäben 70°, 46° 30 und 20° 8 der zugehörigen Tabelle in mm für $\varphi_1 = 86 \cdot 9$, $\varphi_2 = 215 \cdot 2$, $\varphi_3 = 1313$. Die Berechnung geschieht nach den bekannten Formeln und lässt sich in der Tabelle verfolgen. Wir wollen die für das ruhende Auge einfach vorhandene Terminans: T. unica nennen.

Ein ähnlicher conjugirter Raum ist für jede Accommodationseinstellung des Auges vorhanden und in der Fig. 4 noch für das auf 153 · 1 mm Entfernung eingestellte Auge entworfen. Mit Rücksicht auf das später zu besprechende binoculare Sehen wurde der Fixationspunkt A symmetrisch zwischen beiden Augen angenommen. Vom R Auge aus sind wiederum die drei Strahlen 70°, 46° 30 und 20° 8 gezogen, gestrichelt, nämlich R α_1; R $\alpha_2\,\alpha_{II}$ und R $\alpha_3\,\alpha_{III}$. Bezüglich der Brechung im Meridian der Einfallsebene entsprechen den Netzhautpunkten die Punkte $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, welche somit die Terminans anterior bilden. Die Entfernungen, wie aus den mit „Einfallsebene" überschriebenen Stäben der Tabelle zu ersehen ist, von R betragen in mm: für α_1 29 · 44; α_2 72 · 8; α_3 137 · 8. Die Terminans anterior geht durch den Fixationspunkt A, von welchem auch die Terminans posterior A $\alpha_{III}\,\alpha_{II}$ ausgeht. Die Entfernungen der hinsichtlich des zur Einfallsebene senkrechten (vertikalen) Meridians den Netzhautpunkten conjugirten Punkten betragen in mm für α_{III} 190 · 6; α_{II} 110 · 5; der auf dem Strahl 70° liegende Punkt fällt ins Unendliche. Was sich nach aussen der beiden Terminantes $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ A $\alpha_{III}\,\alpha_{II}\,\infty$ (+ + +) befindet, bildet den conjugirten Raum für das accommodirte Auge. Alle Leuchtpunkte in demselben erzeugen so gelegene Bildstrecken im accommodirten

Auge, dass die Netzhaut dieselben schneidet. Aus dem Querschnitt der Zeichnung erhält man die räumliche Form durch Rotation um die Sehaxe. Die Terminans unica $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \infty$ hat sich in die Terminans anterior-posterior $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 A \alpha_{III} \alpha_{II} \infty$ verwandelt. Beide eilen mit ihren entfernteren Enden dem Unendlichen zu. Was jenseits beider, also jenseits der Linie $\varphi_1 \varphi_2 \beta$ (Kreuzungspunkt) α_{II}, welche wir Terminans absoluta nennen wollen, gelegen ist, bleibt Spatium conjugatum, mag das Auge accommodiren oder nicht. Für diesen Theil des Raumes ändert die Accommodation Nichts, sie ist einflusslos auf denselben. Er ist absoluter conjugirter Raum unter allen Umständen.

Ehe wir auf die Bedeutung dieser Einrichtung für das Sehen eingehen, wollen wir den conjugirten Raum des entgegengesetzten Auges besprechen. Die Terminans unica des linken Auges ist, um Verwirrung der Figur zu vermeiden, nicht gezeichnet. Man zieht durch L eine Parallele zu $R\varphi_1$, trägt auf derselben $L p_1 = R \varphi_1$ ab und lässt von p_1 aus eine Curve $p_1 p_2 p_3 \infty$ parallel $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \infty$ verlaufen. Die Terminans anterior (‑◡‑◡‑◡‑) $a_1 a_2 a_3 A$ und die T. posterior $A a_{III} a_{II} \infty$ ist in derselben Weise wie beim rechten Auge construirt und gezeichnet. Der binoculare conjugirte Raum liegt für die ruhenden Augen jenseits $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \infty$. Was zwischen dieser Linie und der Terminans unica $p_1 p_2 p_3 \infty$ des linken Auges sich befindet, ist nur für das gleichseitige Auge conjugirt. Der binoculare conjugirte Raum der accommodirten Augen liegt nach aussen von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 A a_{III} a_{II} \infty$. Der Theil zwischen $a_1 a_2 a_3 A \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$ und zwischen $\infty a_{II} a_{III} A \alpha_{III} \alpha_{II} \infty$ ist nur für das gleichseitige rechte Auge conjugirt. Vom Querschnitt gelangt man überall zum räumlichen Gebilde, indem man sich eine Rotation um die Sehaxen ausgeführt denkt. Die Lage der Terminantes für Accommodationseinstellungen, welche zwischen der als Beispiel benutzten und der Ruhestellung sich befinden, kann man sich leicht vorstellen. Mit dem Hinausrücken von A nähert sich $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 A$ allmählich der Terminans unica $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \infty$.

Tabelle XXVIII.

Die der Netzhaut hinsichtlich der Brechung im Meridian der Einfallsebene und in dem zu derselben vertikalen Meridian conjugirten Objektorte.

	Ruhendes Auge.				Accommodirtes Auge (153·1 mm = $5\frac{1}{2}$″).			
	70°	46° 30	20° 8	0°	0°	20° 8	46° 30	70°
Entfernung der Netzhaut von der Hinterfläche der Linse	+ 9·3	+ 12·8	+ 15·33	+ 15·5	+ 15·5	+ 15·33	+ 12·8	+ 9·3
Dazu conjugirte Brennweiten ab Hinterfläche der Linse	— 11·2	— 16·12	— 19·91			— 20·27	— 16·34	— 11·31
	— 11·61	— 16·84	— 20·76	— 20·66	— 21·13	— 20·9	— 16·59	— 11·61
Weg in der Linse	4·36	3·98	3·751	3·7	4·08	4·1323	4·41	4·943
Conjugirte Brennweiten ab Vorderfläche der Linse	— 17·71	— 22·48	— 26·34			— 31·35	— 26·68	— 21·13
	— 21·48	— 24·33	— 26·55	— 27·31	— 33·19	— 33·97	— 30·6	— 35·83
Weg im Humor aqueus	4·86	4·02	3·687	3·6	3·22	3·294	3·62	4·04
Conjugirte Objectorte ab Hornhaut:								
Terminans posterior (Vert.)	— 106·9	— 255·0	— 1506	∞	+ 153·1	+ 190·6	+ 1105·0	— 307·7
Terminans anterior (Einf.)	+ 86·9	+ 215·2	+ 1313	∞	+ 153·1	+ 137·8	+ 72·8	+ 29·44
Linsen in Zollen	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9\frac{2}{5}}$	$-\frac{1}{55}$		$+\frac{1}{5\frac{1}{2}}$	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{1}{41}$	$-\frac{1}{11}$
	$+\frac{1}{3\frac{1}{5}}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{48}$			$+\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{2\frac{7}{10}}$	$+\frac{1}{1\frac{1}{10}}$
Differenzlinse	$\frac{1}{1 \cdot 8}$	$\frac{1}{4 \cdot 3}$	$\frac{1}{25}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2 \cdot 5}$	$\frac{1}{1}$

23. Experimentelle Untersuchung über die Lage des Brenngebildes im menschlichen Auge.

Wenn das Brenngebilde wirklich die angenommene Gestalt hat, so ergeben sich Folgerungen ganz bestimmter Natur betreffs der Sichtbarkeit verschieden geformter Objekte, welche in verschiedenen Entfernungen vom Auge, seitlich gelegen sind. Befindet sich z. B. während der Ruhestellung des Auges die Netzhaut in der Nähe der ersten Brennlinien, während der Accommodation aber in der Nähe der zweiten, so müssen in jenem Falle besser entfernte senkrechte Linien, in diesem besser entfernte horizontale gesehen werden. Derartige Versuche sind schwer mit Zuverlässigkeit auszuführen; dagegen ist es verhältnissmässig leicht, sich zu überzeugen, dass man entfernte seitlich gelegene Gegenstände ebenso gut mit accommodirtem, wie für die Ferne eingestelltem Auge sieht, ein Resultat, welches die Indifferenz des peripheren Sehens der Accommodation gegenüber zu beweisen geeignet ist.

Es war jedoch auch wünschenswerth, durch subjektive oder objektive Untersuchung am menschlichen Auge direkt den Grad des Astigmatismus und die Lage der Netzhaut bezüglich der Brennlinien für accommodirtes und ruhendes Auge zu ermitteln. Da subjektive Untersuchungen über die Lage der Brennlinien zur Netzhaut mir kein verlässliches Resultat ergeben wollten, suchte ich nach einer objektiven Methode und fand diese darin, dass ich mit dem Augenspiegel Schatten von einem horizontalen und einem vertikalen Gitter in das seitwärts um (60°) gewandte zu untersuchende Auge warf und die Entfernung der Gitter bestimmte, welche nöthig war, um mir die Schatten im untersuchten Auge möglichst deutlich erscheinen zu lassen.

Der Apparat ist ähnlich den schon von anderer Seite beschriebenen, unterscheidet sich von denselben aber durch grössere Handlichkeit.

Auf der Lampe ist ein Kasten angebracht (26 × 18 × 6 cm). Derselbe lässt sich mitsammt einem Gestell um die (vertikale) Axe der Lampe nach rechts und links drehen. Ausserdem kann man den Kasten allein um eine horizontale, von dem Gestell getragene, Axe nach oben und unten drehen. Die Flamme befindet sich im Focus einer Linse (10·8 cm). Bei allen Bewegungen des Kastens bleibt die Flamme stets in diesem Brennpunkte. Eine Schiene, welche in Centimeter eingetheilt ist und von welcher ein Stück in einer Führung läuft, so dass sie verkürzt oder verlängert werden kann, verbindet den Kasten mit dem Spiegel, so dass der Kasten sich stets gleichmässig zusammen mit jeder Bewegung des Spiegels und der Schiene mitbewegt. Zwei Schieber tragen Drahtgitter. Die Drahtgitter lassen sich beliebig senkrecht oder horizontal stellen. Der Zwischenraum der Drähte ist 3 mm. Eine zweite Linse wirft ein Bild der Gitter in das untersuchte Auge. Diese Linse muss bald eine kürzere, bald eine längere Brennweite haben, gewöhnlich zwischen 8·1 und 18·9 cm, je nach dem Brechzustande des untersuchten Auges, bei Hypermetropen kürzer, bei Myopen länger.

Jedes einzelne Gitter wird so gestellt, dass das Bild auf der Retina am deutlichsten ist. Um es deutlich zu sehen, muss man die Correctionsgläser hinter dem Spiegel entsprechend wechseln. Die Entfernung des Bildes, welches die Linse von dem Gitter entwirft, von der Linse findet man nach der Formel $x = af : (a - f)$, wo f die Brennweite derselben, a die Entfernung des Gitters von der Linse ist. Zählt man zu x die Entfernung der Linse vom Spiegel = 3·5 cm und des Spiegels vom untersuchten Auge (3 cm) hinzu, so erhält man die Entfernung des Bildes vom untersuchten Auge.

Controliren kann man das Resultat, indem man genau das Correctionsglas hinter dem Spiegel sucht, mit welchem man die Schatten auf der Retina, ohne zu accommodiren, am deutlichsten sieht.

Aus der Differenz der Entfernungen des horizontalen und vertikalen Gitters wurde der Grad des Astigmatismus berechnet und ausgedrückt durch den Werth der Cylinderlinse, welche den Astigmatismus corrigiren würde. Ausserdem wurde die Lage der Leuchtpunkte berechnet, welche bezüglich der Brechung im Meridian der Einfallsebene oder dem dazu senkrechten den Netzhautpunkten in den untersuchten Augen jedesmal conjugirt waren. Es zeigte sich, dass jedes im Centrum stigmatische Auge 60° seitlich astigmatisch ist.

Das menschliche Auge bricht schief einfallende Strahlen astigmatisch und zwar so, dass der in der Einfallsebene gelegene Meridian kurzsichtiger ist. In 10 von den 16 untersuchten Augen liegt die Netzhaut innerhalb des Brenngebildes, in zweien über dasselbe hinaus, in vieren davor. Für unter einem Winkel von 60° mit der Axe durch die Linse gehende Strahlen beträgt die Brechungsdifferenz $= \frac{1}{13}$.

Tabelle XXIX.

Auge	Central	Seitlich 60°. Vertikaler Meridian (in Zollen)	Seitlich 60°. Horizontaler Meridian (in Zollen)	Differenz (in Zollen)	Entfernungen der conjugirten Punkte von der Hornhaut (in mm). Vertikaler Meridian	Entfernungen der conjugirten Punkte von der Hornhaut (in mm). Horizontaler Meridian
1.	M $\frac{1}{36}$	M $\frac{1}{27}$	M $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{16}$	+ 730	+ 260
2.		M $\frac{1}{24}$	M $\frac{1}{9 \cdot 3}$	$\frac{1}{15}$	+ 640	+ 250
3.	H $\frac{1}{20}$	H $\frac{1}{7}$	H $\frac{1}{12}$	$\frac{1}{17}$	— 190	— 320
4.	H $\frac{1}{49}$	H $\frac{1}{12}$	M $\frac{1}{16 \cdot 3}$	$\frac{1}{7}$	— 350	+ 410
5.	M $\frac{1}{36}$	H $\frac{1}{12}$	M $\frac{1}{42}$	$\frac{1}{10}$	— 350	+ 1110
6.	E.	H $\frac{1}{30}$	M $\frac{1}{16}$	$\frac{1}{10}$	— 840	+ 430
7.	H $\frac{1}{8}$	H $\frac{1}{10}$	H $\frac{1}{26}$	$\frac{1}{16}$	— 230	— 670
8.		H $\frac{1}{11}$	H $\frac{1}{26}$	$\frac{1}{19}$	— 270	— 670
9.	M $\frac{1}{40}$	E $\left(H \frac{1}{150}\right)$	M $\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	— 4050	+ 490
10.	E.	H $\frac{1}{140}$	M $\frac{1}{22}$	$\frac{1}{20}$	— 3780	+ 590
11.	M $\frac{1}{42}$	H $\frac{1}{24}$	M $\frac{1}{40}$	$\frac{1}{15}$	— 650	+ 1080
12.	M $\frac{1}{60}$	H $\frac{1}{17}$	M $\frac{1}{22}$	$\frac{1}{9 \cdot 6}$	— 460	+ 590
13.	H $\frac{1}{50}$	H $\frac{1}{12}$	E.	$\frac{1}{12}$	— 260	+ ∞
14.	H $\frac{1}{17}$	H $\frac{1}{11}$	H $\frac{1}{17}$	$\frac{1}{31}$	— 300	— 460
15.	H $\frac{1}{24}$	H $\frac{1}{20}$	M $\frac{1}{22}$	$\frac{1}{11}$	— 540	+ 590
16.	M $\frac{1}{20}$	H $\frac{1}{17}$	M $\frac{1}{127}$	$\frac{1}{15}$	— 460	+ 3430
			Mittel:	$\frac{1}{13}$		

Wenn nun durch diese Messungen das Vorhandensein eines ausgedehnten Brenngebildes für schiefe Strahlenbündel unzweifelhaft auch direkt nachgewiesen ist, so kommt den Zahlenwerthen doch nur ein bescheidenes Mass von Genauigkeit zu, welches allerdings das überhaupt erreichbare ist. Ein Blick auf die Querschnitte des Brenngebildes Fig. 23 lehrt, dass wir es niemals mit den scharfen Lichtlinien allein zu thun haben, sondern dass immer zugleich ein heller Zerstreuungshof vorhanden ist. In Folge dessen giebt es scharf markirte Einstellungspunkte nicht. So viel steht fest: es existirt eine Objektstrecke von ziemlicher Länge, auf welcher man das Gitter verschieben kann, während der Schatten auf der Netzhaut sichtbar bleibt, bald deutlicher in den horizontalen, bald in den vertikalen Fäden. Berücksichtigt man die Häufigkeit der Refractionsanomalieen, so überraschen die grossen individuellen Abweichungen nicht, welche sich auch in der Richtung der Nebenaxen bezüglich des Ortes der Netzhaut ergeben. Zieht man aus den Werthen der nebenstehenden Tabelle die Mittel unter Ausschluss der stark hypermetropischen Augen No. 3. 7. 8. 14, bei welchen augenscheinlich congenitale Abnormitäten im Bau des Auges vorhanden sind, so erhalten wir als conjugirten Punkt bezüglich der Einfallsebene einen 840 mm vor der Hornhaut gelegenen Leuchtpunkt, bezüglich des zur Einfallsebene senkrechten Meridians einen 800 mm hinter der Hornhaut gelegenen Punkt. Diese Entfernungen entsprechen jede einer Linse von 30 Zoll Brennweite. Die Brechungsdifferenz ist somit gleich einer Linse = 1 : 15.

Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Werthen erscheint vielleicht nicht so gross, wie wünschenswerth, denn selbst wenn wir das 46° 30-Bündel zur Vergleichung mit dem unter einem Einfallswinkel von 60° einfallenden gemessenen Bündel herbeiziehen, so sehen wir dort eine etwa dreimal stärkere (1 : 4·3 und 1 : 15) Brechungsdifferenz. Die conjugirten Orte liegen nach der Berechnung rund 250 mm vor und hinter der Hornhaut, während die Messung dafür 800 mm ergab. Indessen nehmen die Brechungsdifferenzen von der Peripherie nach dem Centrum sehr schnell ab:

70°	46° 30	20° 8	0°
1 : 1·8	1 : 4·3	1 : 25	1 : ∞,

woraus folgt, dass jeder Fehler in der Richtungsbestimmung des einfallenden Bündels bei der Messung bedeutend ins Gewicht fallen wird.

Zweitens muss folgender Umstand Berücksichtigung erfahren. Die Messungen können nur bei maximal erweiterter Pupille angestellt werden. Die Folge davon ist, dass die die Brennlinien umgebenden

Zerstreuungs-Lichthöfe viel intensiver und grösser werden, so dass gegen die Enden des Brenngebildes hin die Brennlinien verhältnissmässig zurücktreten und nicht mehr deutlich wahrgenommen werden können.

Bei sehr weiter Pupille ist es streng genommen nicht mehr erlaubt zu übersehen, dass die Hornhaut zwar annähernd eine Rotationsfläche, aber jedenfalls nicht sphärisch ist. Nur bei sphärischen Flächen liegt, wie oben erläutert wurde, die Caustica interna aller Strahlen in der Einfallsebene. Das Rotationsellipsoid der Hornhaut aber, sobald es sich in Folge hochgradiger Erweiterung der Pupille um ein Bündel von grösserem Querschnitt handelt und auch die oberhalb und unterhalb der Einfallsebene durch die Pupille gehenden Strahlen beachtet werden müssen, erzeugt ein Brenngebilde, dessen Caustica interna nicht mehr eine scharfe in der Einfallsebene gelegene Schneide darstellt, sondern eine gebogene Fläche, vergl. die stereoskopische Fig. 2 Taf. XI. Die maximale Erweiterung der Pupille muss also bewirken, dass die das entferntere Ende des Brenngebildes zusammensetzenden zweiten Brennlinien weniger scharf begrenzt erscheinen. Aus dem Umstande, dass die Messungen kürzere Strecken zwischen den beiden Einstellungen des vertikalen und horizontalen Gitters ergaben, darf daher keineswegs gefolgert werden, dass die Brennstrecken wirklich kürzer seien und die Astigmasie geringer, als aus der Berechnung resultirte; es folgt daraus vielmehr nur, dass gegen die Enden des Brenngebildes hin die Brennlinien in dem Zerstreuungshofe nicht scharf genug hervortreten, um ausgeprägte Bilder der Gitter zu geben.

24. Die Bedeutung des Spatium conjugatum für das Sehen mit einem und mit beiden Augen.

Lassen wir in einem ursprünglich auf die Ferne eingestellten Auge die Accommodation allmählich an Stärke wachsen, so wird das Brenngebilde eines fernen seitlichen Leuchtpunktes nach dem Inneren des Auges zu rücken. So lange aber die Retina sich noch innerhalb des Brenngebildes befindet, muss die Schärfe und namentlich die Helligkeit des Bildes annähernd dieselbe bleiben. Das Vorhandensein der Brennstrecke hebt für das periphere Sehen die wesentliche Wirkung der Accommodation auf. Es fragt sich, ob diese Einrichtung der Zweckmässigkeit besser entspricht, als eine solche, nach welcher bei Mangel astigmatischer Brechung der Einfluss der Accommodation in der Peripherie der gleiche ist, wie in der Axe.

Da die Causae efficientes der Darwin'schen Theorie schliesslich zu demselben Resultat führen müssen, wie die Causae finales der teleologischen, so ist es statthaft, bei einer noch unverstandenen Einrichtung nach der Zweckmässigkeit zu fragen. Die Schwierigkeit liegt nur darin, zu entscheiden, was im Einzelfalle als Gegenstand der Zweckmässigkeitsforderung anzusehen ist. Es liegt die Versuchung nahe, den an optischen Instrumenten gewonnenen Massstab von Vollkommenheit, nämlich die Forderung homocentrischer Brechung, ohne Weiteres auch beim Auge in Anwendung zu bringen. In zwei Hauptpunkten unterscheidet sich das Auge von allen optischen Instrumenten: erstens in der Grösse des Gesichtsfeldes und zweitens in der Fähigkeit des Accommodirens.

Wollte die Natur ein kleines, handliches, leicht bewegliches, für Nähe und Ferne einstellbares Gesichtsorgan mit möglichst grossem Gesichtsfelde herstellen, so war die Kugelform des Auges mit in ihrer Form veränderlicher Linse das einzig Mögliche. Dadurch war wiederum die Annäherung der Seitentheile der Netzhaut an die brechenden Medien bedingt. Wenn nun überhaupt ein einigermassen brauchbares Bild auf den Seitentheilen der Netzhaut zu Stande kommen sollte, so mussten die brechenden Medien in der seitlichen Richtung stärker brechen. Dass soweit Periskopie wirklich vorhanden ist, kann nicht bezweifelt werden.

Anders verhält es sich mit einer darüber hinausgehenden periskopischen Einrichtung, welche vollständig homocentrische Brechung auch der schief einfallenden Strahlenbündel zum Zweck hätte. Derartige Homocentricität könnte immer nur für Gegenstände in einer bestimmten Entfernung vorhanden sein, z. B.

für solche, welche sich in einer durch den jedesmaligen Fixationspunkt gehenden Accommodationssphäre befinden. Alle diesseits oder jenseits dieser Sphäre gelegene Gegenstände müssen im gleichen Verhältnisse undeutlich erscheinen, wie für das centrale Sehen näher oder ferner als der Fixationspunkt befindliche Objekte. Beim Sehen in die Ferne haben aber unendlich entfernte Gegenstände für uns weit weniger Bedeutung als z. B. der Fussboden, die Bäume zur Seite, die rechts und links Vorübergehenden.

Aehnliches gilt für das accommodirte Auge. Accommodiren wir auf einen nahen Punkt, so wird nur die centrale Netzhaut und die unmittelbare Umgebung in Anspruch genommen. Gewöhnlich befindet sich genau in der Accommodationssphäre Nichts neben dem fixirten Gegenstande. Dagegen ist für uns unzweifelhaft von Werth, auch während einer solchen Beschäftigung über das, was seitwärts in grösserer Entfernung vorgeht, unterrichtet zu werden. Hiervon würden wir aber Nichts erfahren, vielmehr würden drei Viertel des Gesichtsfeldes mit lichtschwachen verwaschenen Bildern mehr weniger entfernter Gegenstände ausgefüllt sein.

Die Accommodation hat nur Werth für das centrale Sehen, weil das periphere niemals für die Nähe benutzt wird. Wir setzen den Accommodationsapparat nicht in Thätigkeit, um einen seitlich gelegenen Gegenstand deutlicher zu sehen, ohne das Auge nach diesem zu richten. Wenn das Auge auch in seitlicher Richtung jedesmal von den in der Accommodationssphäre gelegenen Gegenständen homocentrische Bilder bekäme, so würde im accommodirten Auge die Helligkeit der Bilder entfernter seitlich gelegener Leuchtpunkte eine ausserordentlich geringe sein, da dieselbe sich nicht nur mit der Entfernung des Leuchtpunktes umgekehrt proportional dem Quadrat derselben verminderte, sondern ausserdem noch umgekehrt proportional dem Quadrat der Höhe des Zerstreuungskegels.

Die Helligkeit und Entfernung seitlich nicht in der Accommodationssphäre gelegener Objekte würde ungemein schwer geschätzt werden können, da die Helligkeit sich nicht nach dem gewöhnlichen Gesetz der Entfernung verringerte, sondern nach einem durch Einführung dieses neuen Faktors viel verwickelter gewordenem.

Uebrigens wäre auch die grosse Schärfe der Bilder auf der seitlichen Netzhaut eine unnütze, da die Empfindungseinheiten unzweifelhaft auf derselben sehr viel ausgedehnter anzunehmen sind als im Centrum. Je weiter nach der Peripherie zu, eine desto grössere Anzahl Stäbchen treten zu Empfindungseinheiten von um so grösserem Querschnitt zusammen. Auf diese grössere Stäbchenzahl entfällt nur eine gesonderte Leitungsfaser.[1])

Die thatsächlich geringe räumliche Sehschärfe im peripheren Theile des Gesichtsfeldes könnte man auf drei Weisen erklären. Erstens könnte der dioptrische Apparat nicht genügend scharfe Bilder liefern, während die Netzhaut hinreichende Feinheit der Empfindung besässe, um noch viel kleinere räumliche Unterschiede wahrzunehmen, wenn der dioptrische Apparat mit grösserer Genauigkeit arbeitete. Andererseits könnte die Lichtbrechung zwar eine vollständig homocentrische sein, die Empfindung aber zu stumpf für die Verwerthung der scharfen Bilder. Augenscheinlich ist die dritte Auffassung, nach welcher die Schärfe der Bilder mit der Empfindungsfähigkeit der Netzhaut im Einklang steht und umgekehrt, die einzig annehmbare. Die Bilder sind so scharf, wie sie die Netzhaut gebrauchen kann, und die Empfindungseinheiten der letzteren so fein, wie sie zur Wahrnehmung der Bilder nöthig sind.

Die Aufgabe des peripheren Sehens ist, die Aufmerksamkeit auf bestimmte Gegenstände zu lenken. Wären die Eindrücke der seitlichen Netzhautbilder im Sensorium ebenso deutlich wie die der centralen, so würden sie gleiche Ansprüche an die Aufmerksamkeit machen und die Concentration derselben auf die fixirten Objekte hindern.

Für das monoculare Sehen hat das Bestehen des Brenngebildes bei schief einfallenden Strahlenbündeln folgende Wirkung. Liegt die Netzhaut während der Ruhestellung in der Nähe der ersten Brennlinien, so wird mit Zunahme der Accommodation das Brenngebilde mehr nach dem Augeninnern zu rücken,

[1]) Schoen, Die Empfindungseinheiten der Netzhaut. Arch. f. Ophth. XXIV. 1. S. 113.

die Netzhaut aber selbst bei äusserster Accommodationsanspannung sich noch innerhalb derselben befinden. Die seitliche Netzhaut bekommt auf diese Weise allerdings niemals stigmatische Bilder, diese hätten aber auch keinen Werth für dieselbe, einmal wegen der anatomisch begründeten geringen räumlichen Sehschärfe der peripheren Netzhaut, und dann weil sich sehr selten gerade in der betreffenden Accommodationssphäre Gegenstände befinden, welche für das seitliche Sehen von Interesse sind.

Dafür erhält aber die Netzhaut bei jedem Fixations- und Accommodationszustande von seitlichen Leuchtpunkten, in welcher Entfernung sie sich auch befinden mögen, solche Bilder, die, wenn auch nicht ganz scharf, doch für die Peripherie hinreichend scharf sind — deren Helligkeit nur nach dem allgemeinen Gesetz der Entfernung sich ändert und nicht zwischen den Extremen vollständiger Schärfe nebst grösster Helligkeit und gänzlicher Verwaschenheit und Dunkelheit wechselt.

Wenn wir beim seitlichen Sehen es überwiegend mit ausserhalb der Accommodationssphäre gelegenen sichtbaren Dingen zu thun haben, so achten wir dagegen im Centrum und der nächsten Umgebung desselben nur auf das in der Accommodationssphäre Gelegene, welches wir fixiren und sehen wollen. Erleichtert wird dies durch das Fehlen des Brenngebildes im Centrum, in Folge dessen alle nicht in der Accommodationssphäre gelegenen Gegenstände verändert, verhältnissmässig lichtschwach und verwaschen erscheinen.

Wir haben noch den conjugirten Raum in Bezug auf das binoculare Sehen zu betrachten. Sind beide Augen auf einen Punkt A accommodirt, so ist der conjugirte Raum des rechten Auges nach der Mittellinie zu begrenzt durch die (+ + + + +) Linie Terminans anterior-posterior: $R \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 A \alpha_{III} \beta \alpha_{II} \infty$, derjenige des linken Auges durch die (–⌒–⌒–⌒–) Linie $L a_1 a_2 a_3 A a_{III} a_{II} \infty$. Letzterer ist um das kleine Stück zwischen $a_1 a_2 a_3$ und $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ grösser, in welchem für gewöhnlich Objekte sich nicht befinden, dagegen um das grosse Gebiet zwischen $A \alpha_{III} \alpha_{II}$ und $A a_{III} a_{II}$ kleiner. Die Bilder der in diesem Abschnitt gelegenen Objekte müssen sich der Accommodation gegenüber in den beiden Augen verschieden verhalten. Das Objekt liegt für das rechte Auge im conjugirten Raum, sein Bild darf durch die Accommodation keine Veränderung erleiden, während der conjugirte Raum des linken Auges das Objekt nicht einschliesst. Die Schärfe des Bildes muss also in diesem Auge durch die Accommodation geschädigt werden.

Durch geeignete Versuche[1]) lässt sich zeigen, dass das centralere Doppelbild des entgegengesetzten Auges, welches nicht im Spatium conjugatum absolutum liegt, viel stärker durch die Accommodation beeinflusst wird als das gleichseitige im Spatium conjugatum befindliche und dass in Folge dessen das Bild des gleichseitigen Auges hauptsächlich beachtet und meistens als Repräsentant des Gegenstandes angesehen wird.

Das Gesichtsfeld reicht nasalwärts nicht weiter als 50°. Das entgegengesetzte Auge hat nur einen kleinen Antheil am binocularen conjugirten Raum. Die Helligkeit und die Schärfe des Bildes ändert sich auf den Querschnitten durch das gebrochene Strahlenbündel innerhalb des Brenngebildes und auch jenseits desselben ganz allmählich, so dass auch in diesem, zwischen dem Strahl $L a_{II}$ und der Terminans post. $A a_{III} a_{II}$ gelegenen Theile des binocularen conjugirten Raumes, welcher an das nicht gemeinsame Gebiet $a_{II} a_{III} A \alpha_{III} \beta \alpha_{II}$ grenzt, die Bilder des gleichseitigen Auges einen Vorsprung vor denjenigen des entgegengesetzten haben.

[1]) Schoen, Zur Lehre vom binocularen Sehen. Arch. f. Ophth. XXIV. 1. S. 63.

Litteratur.[1])

1729 Newton, Lectiones opticae. Londini.

1682 Tschirnhausen, Inventa nova, etc. *Acta eruditorum 1682, p. 364.*

1690 De la Hire, Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans un quart de cercle. *Mém. de l'anc. Acad. des sc. IX. 448.*

1692 Jean Bernoulli, Solutio curvae causticae per vulgarem geometriam Cartesianam. *Opera I. 52.*

1693 Jacob Bernoulli, Curvae diacausticae earumque relatio ad evolutas. *Acta eruditorum 1693.*

1696 L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits, p. 104.*

1807 Malus, Traité d'optique. *Mém. des sav. étrang. II. 214.*

1808 Malus, Mémoire sur l'optique. *Journ. de l'école Polytech. cah. XIV, p. 1.*

VII Monge, Géométrie descriptive. Paris, Baudouin.

1809 Monge, Application de l'analyse à la Géométrie. Paris, Bernard.

1812 Petit, Des caustiques par réflexion et par réfraction. *Corresp. sur l'Ecole Polytech. II. 354.*

1813 Gergonne, Recherches des lignes et surfaces, qui touchent une infinité d'autres, se succédant suivent une loi uniforme. *Ann. de math. III.*

1817 Ch. Dupin, Mémoire sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion. *Ann. de chimie et de phys. (2) V. 85.*

1822 Ch. Dupin, Sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction. *Applic. de géom. et de mécan. p. 187.*

1822 Quetelet, Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, soit par réflexion, soit par réfraction. *Nouv. Mém. de Brux. III. 15.*

1823 Gergonne, Recherche analytique des propriétés les plus générales des faisceaux lumineux directs, réfléchis et réfractés. *Ann. de math. XIV. 129.*

1824 Sturm, Recherches sur les caustiques par réflexion et par réfraction dans le cercle. *Ann. de math. XV. 205.*

1824 Sturm, Recherches d'analyse sur les caustiques planes. Ebenda S. 345.

1826 Timmermans, Recherches sur les caustiques. *Corresp. de math. et de phys. I. 336.*

1826 Saint Laurent, Recherches sur les caustiques par réflexion dans le cercle. *Ann. de math. XVI. 1.*

1826 Gergonne, Solution de divers problèmes d'optique. *Ann. de math. XVI. 65.*

1826 Gergonne, Formules d'optique à trois dimensions. *Ann. de math. XVI. 247.*

1826 Gergonne, Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques et résumé historique de cette recherche. *Ann. de math. XVI. 307.*

1826—28 Quetelet, Resumé d'une nouvelle théorie de caustiques. *Nouv. Mém. de Brux. III. 15, IV. 79, V. 5.*

1829—30 Hamilton, An Essay on the theory of Systems of Rays. *Ir. Trans. XV. 69, XVI. 1, 94.*

1829 Coddington, A Treatise of the Reflexion and Refraction of Light. *Cambridge.*

1833 Quetelet, Analogie entre la théorie des caustiques et celle des développantes et des développés. — Théorie des surfaces et des lignes aplanétiques. *Supplém. à la trad. du Traité de la lumière de J. Herschel, II. 380.*

1838 Sturm, Mémoire sur l'optique. *Journ. de Liouville (1) III. 357.*

1841 Gauss, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen, Dieterich.

1844 Bertrand, Sur la théorie des surfaces. *Journ. de math. IX. p. 133.*

1844 Fink, Note sur la courture des surfaces. Ebenda S. 400.

1848 Sturm, Sur la théorie de la vision. *C. R. XX. 554, 761, 1238.* Ann. d. Phys. u. Chem. LXV. 134. 374.

1848 Plücker, Sur la réflexion de la lumière dans les cas des surfaces du seconde degré. *Journ. de Crelle XXXV. 100.*

1854 Valée, Note sur plusieurs théorèmes relatifs aux systèmes de droites situées dans l'espace. *C. R. XXXVIII. 18.*

[1]) Zusammengestellt unter Benutzung von: Verdet, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsch v. Exner Braunschweig 1881.

1858 Maxwell, On the general Laws of Optical Instruments. *Quart. jour. of Math. II. 233.*
1859 Kummer, Allgem. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. *Journ. de Crelle LVII. 189.* — Berl. Monatsber. 1860, S. 469.
1861 Meibauer, De generalibus et infinite tenuibus luminis fascibus praecipue in chrystallis. Berolini.
1862 Seidel, Ueber die Brennflächen eines Strahlenbündels, welches durch ein System concentrirter sphärischer Gläser hindurchgezogen ist. Berl. Monatsber. 1862, S. 696.
1863 Möbius, Geometrische Entwicklung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel. Leipz. Ber. 1862, S. 1.
1863 Meibauer, Ueber allgemeine Strahlensysteme des Lichts in verschiedenen Mitteln. Zeitschr. f. Math. 1863, S. 369.
1864 Meibauer, Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts. Berlin.
1866 Lévistal, Recherches d'optique géométrique. C. R. LXIII. 458.
1866 Gilbert, Sur la concordance des rayons lumineux au foyer des lentilles. C. R. LXIII. 800.
1867 Lévistal, Sur les propriétés générales des systèmes optiques de rayons rectilignes. Ann. de l'Ecole. Norm. IV. 195.
1867 Reusch, Reflexion und Brechung des Lichts an sphärischen Flächen unter Voraussetzung endlicher Einfallswinkel. Annalen der Phys. u. Chem. Bd. 130. 1867. S. 497.
1868 Reusch, Theorie der Cylinderlinsen. Leipzig, Teubner.
1868 Schwanefeld, Ueber Symptose von Bild und Objekt. Diss. Göttingen, Huth.
1869 E. Weyr, Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktkurven. Zeitschr. f. Math. XIV. 376.
1870 Reusch, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystemes. Leipzig 1870.
1871 Töpler, Bemerkungen über die Anzahl der Fundamentalpunkte eines beliebigen Systems von centrirten brechenden Kugelflächen. Pogg. Ann. 142. S. 232.
1871 v. Lang, Zur Dioptrik eines Systemes centrirter Kugelflächen. Ber. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. zu Wien 1871. Bd. II.
1873 J. C. Maxwell, On the focal lines of a refracted pencil. London, Math. soc. 1873.
1874 Kiessling, Die Brechung der Lichtstrahlen im Auge. Progr. Hamburg, Meissner.
1875 L. Hermann, Ueber den schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Krystalllinse. Pogg. Ann. CLIII. 470.
1877 Schoen, Brechung seitlich einfallender Strahlen in der Krystalllinse. Bericht d. ophth. Ges. zu Heidelberg, S. 178.
1877 Matthiessen, Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipzig.
1878 Schoen, Zur Lehre vom binocularen Sehen Arch. f. Ophth. XXIV. 1. S. 93.
1878 Hermann, Ueber Brechung bei schiefer Incidenz. Arch. f. Phys. XVIII. S. 443.
1879 Matthiessen, Die Differentialgleichungen der Dioptrik der geschichteten Krystalllinse. Arch. f. Phys. XIX. S. 480.
1879 Hermann, Ueber Brechung bei schiefer Incidenz. Arch. f. Phys. XX. S. 370.
1879 Peschel, Experimentelle Untersuchungen über die Periskopie der Krystalllinse. Arch. f. Phys. XX. S. 338.
1879 Schoen, Bemerkungen über die Dioptrik der Krystalllinse und die Periskopie des Auges. Archiv f. Anat. u. Phys. Suppl.-Bd. S. 146.
1879 Rasmus u. Wauer, Mathematische Theorie der Periskopie des menschlichen Auges. Arch. f. Phys. XX. S. 264.
1880 C. Neumann, Ueber die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels. Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Math. Phys. Cl., S. 42, 1. März.
1881 Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. 2. Aufl. Leipzig, Teubner.
1881 Schoen, Brechung schiefer Strahlenbündel in thierischen Linsen. Centralbl. f. Aug. S. 65.
1881 Matthiessen, Neue Untersuchungen über den Aplanatismus und die Periskopie der Krystalllinse des Fischauges. Arch. f. Phys. XXV. S. 193.
1882 Matthiessen, Ueber die Beziehungen, welche zwischen dem Brechungsindex des Kerncentrums der Krystalllinse und den Dimensionen des Auges bestehen. Arch. f. Phys. XXVII. S. 510.
1882 Hermann, Ueber die Brechung bei schiefer Incidenz. Arch. f. Phys. XXVII. S. 291.
1882 Matthiessen, Ueber die Form unendlich dünner astigmatischer Strahlenbündel und die Kummerschen Modelle. Centralz. f. Opt. u. Mech. No. 24.
1883 Matthiessen, Ueber den schiefen Durchgang unendlich dünner Strahlenbündel durch die Krystalllinse des Auges. Arch. f. Phys. XXXII. S. 97.
1883 Matthiessen, Ueber die Form der astigmatischen Bilder sehr kleiner Linien bei schiefer Incidenz. Arch. f. Ophth. XIX. 1. S. 148.

Inhalt der Tafeln.

Taf.	I	Fig. 1.	Sphärische Aberration an einer Fläche.
		Fig. 2.	Sphärische Aberration an der Kugel.
Taf.	II	Fig. 1.	Aberration an einem Rotationsellipsoid für paraxiale und schiefe Strahlenbündel.
		Fig. 2.	Schematische Darstellung des 90°-Brenngebildes.
		Fig. 3.	Brechung in einer Planconvexlinse für paraxiale und schiefe Bündel.
Taf.	III	Fig. 1.	Brechung in einer Biconvexlinse für paraxiale und schiefe Bündel.
		Fig. 2.	Darstellung der durch Messung erhaltenen Resultate.
Taf.	IV	Fig. 1.	Brechung schiefer Bündel in der homogenen Rindslinse.
		Fig. 2.	Schematische Darstellung des 70°-Brenngebildes.
Taf.	V	Fig. 1.	Brechung schiefer Bündel in der homogenen Schweinslinse.
		Fig. 2.	Schematische Darstellung des 70°-Brenngebildes.
Taf.	VI	Fig. 1.	Brechung schiefer Bündel in der homogenen Menschenlinse.
		Fig. 2—8.	Schematische Darstellung von Brenngebilden.
Taf.	VII	Fig. 1—3.	Darstellung der Messungsergebnisse an der Rindslinse.
		Fig. 4.	Ideale geschichtete Rindslinse.
Taf.	VIII	Fig. 1—3.	Darstellung der Messungsergebnisse an der Schweinslinse.
		Fig. 4.	Ideale geschichtete Schweinslinse.
Taf.	IX	Fig. 1.	Brechung in einer symmetrischen biconvexen geschichteten Linse für paraxiale und schiefe Bündel.
		Fig. 2.	Darstellung der Messungsergebnisse an der Rindslinse für paraxiale Bündel.
		Fig. 3.	Vergleichende Darstellung des Ein- und Austritts der Centralstrahlen in der homogenen und der wirklichen Rindslinse.
		Fig. 4.	Vergleichende Darstellung des Ein- und Austritts der Centralstrahlen in der homogenen und der wirklichen Schweinslinse.
Taf.	X	Fig. 1.	Brechung an der Rotationsfläche einer Curve vierten Grades.
		Fig. 2.	Brenngebilde schiefer Bündel im ruhenden Auge, dessen Hornhaut die Rotationsfläche einer Curve vierten Grades ist.
		Fig. 3.	Brenngebilde schiefer Bündel im ruhenden und accommodirten Auge, dessen Hornhaut die Rotationsfläche eines Ellipsoids ist.
		Fig. 4.	Terminantes conjugatae und Spatium conjugatum.
Taf.	XI	Fig. 1—6.	Stereoskopische Darstellungen der Brenngebilde.
Taf.	XII	Fig. 1.	Reihe aplanatischer Curven für den Parameter $p = 7{\cdot}809$ und $n = 1{\cdot}338$.
		Fig. 2.	Brenngebilde im ruhenden Auge. Die Hornhaut ist die Rotationsfläche der homocentrischen Ellipse.

Erläuterung zu Taf. XI.

Die stereoskopischen Bilder, welche schematisch die Brenngebilde dicker (nicht unendlich dünner) Strahlenbündel darstellen, sind zur Verschmelzung mit parallelen Gesichtslinien bestimmt. Wer dieselbe nicht ohne Stereoskop auszuführen vermag, muss die sechs Bilder ausschneiden. Originalphotographieen sind durch die Verlagshandlung zu beziehen. Die dickeren stellenweise bogenförmig verlaufenden Linien sind die Gesammtbrennlinien.

Fig. 1. Allgemeine Form des Brenngebildes, durch 16 Strahlen dargestellt. Dasselbe ist identisch mit der Gesammtheit der Schnittpunkte der Normalen einer beliebigen Fläche, da die gebrochenen Strahlen stets zu einer solchen senkrecht stehen. Diese Normalen bilden zwei Systeme von (hier je vier) gekrümmten Flächen. Die Flächen des einen Systems stehen senkrecht zu den Flächen des anderen, die Schnittlinie ist jedesmal ein Strahl. Die Flächen desselben Systems schneiden sich unter einander in den (hier je drei) Gesammtbrennlinien. Die Gesammtbrennlinien sind Curven doppelter Krümmung. Diejenigen des einen Systems stehen senkrecht zu den entsprechenden Abschnitten von denjenigen des anderen. Diese Form des Brenngebildes ist überall vorhanden, wo hinsichtlich der brechenden Flächen keine Voraussetzung gemacht ist. Sie findet sich z. B. auch an schief einfallenden Bündeln bei einer oder mehreren centrirten nicht sphärischen Rotationsflächen (Hornhaut).

Fig. 2 stellt ebenfalls die allgemeine Form des Brenngebildes, aber vereinfacht, mittelst 12 Strahlen dar. Das eine Flächensystem besteht nur aus drei Flächen und zeigt nur zwei Gesammtbrennlinien.

Fig. 3. Die (drei) Flächen des einen Systems (der vorhergehenden Figur) schneiden sich in einer Curve doppelter Krümmung. Die Gesammtbrennlinien dieses Systems fallen zusammen. Wenn diese Gesammtbrennlinie eine Curve einfacher Krümmung ist d. h. in einer Ebene liegt, so haben wir das Brenngebilde für schiefe Bündel an sphärischen centrirten Flächen vor uns.

Fig. 4 und 5. Wird diese Curve der vereinigten Gesammtbrennlinien zu einer Geraden, so handelt es sich um das Brenngebilde an einer sphärischen Fläche, oder um das paraxiale Brenngebilde an einer oder mehreren centrirten Rotationsflächen. Die Gesammtbrennlinie deckt sich mit der Axe. Fig. 5 stellt die gewöhnliche paraxiale Aberration dar. Vergl. mit Taf. I Fig. 1.

Fig. 6. Es fallen auch die Gesammtbrennlinien des zweiten Flächensystems zusammen. Werden diese, im Allgemeinen doppelt gekrümmten, vereinigten Gesammtbrennlinien zu Geraden, so haben wir die gewöhnliche astigmatische Brechung vor uns. Das Gesammtbündel wird ebenso gebrochen wie ein unendlich dünnes Bündel.

In allen Figuren bilden je vier benachbarte Strahlen ein unendlich dünnes Bündel mit seinen zwei, in zu einander senkrechten Ebenen liegenden, Brennlinien.

Druck von Pöschel & Trepte in Leipzig.

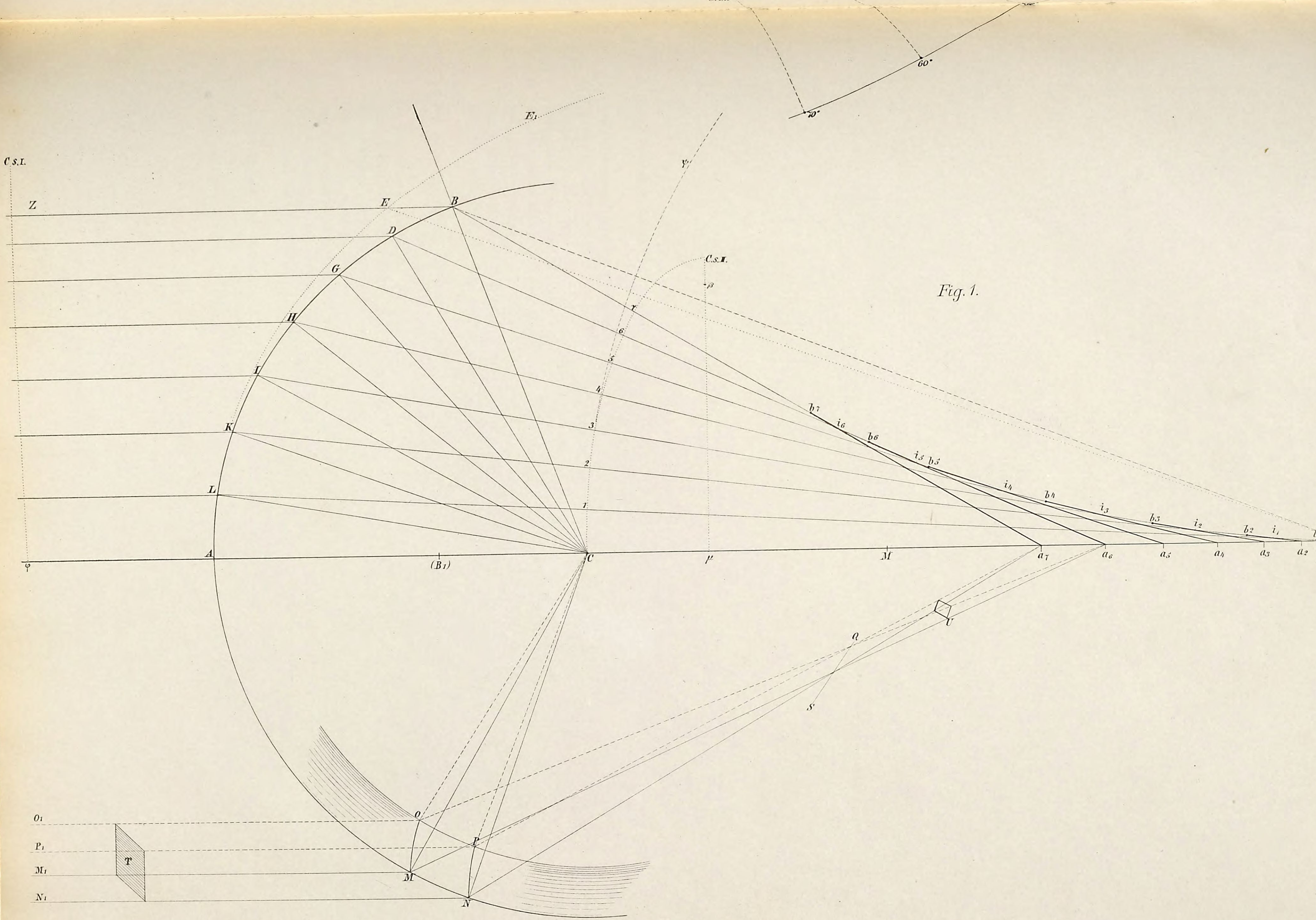


Fig. 1.

Verlag v. W. Engel[...]

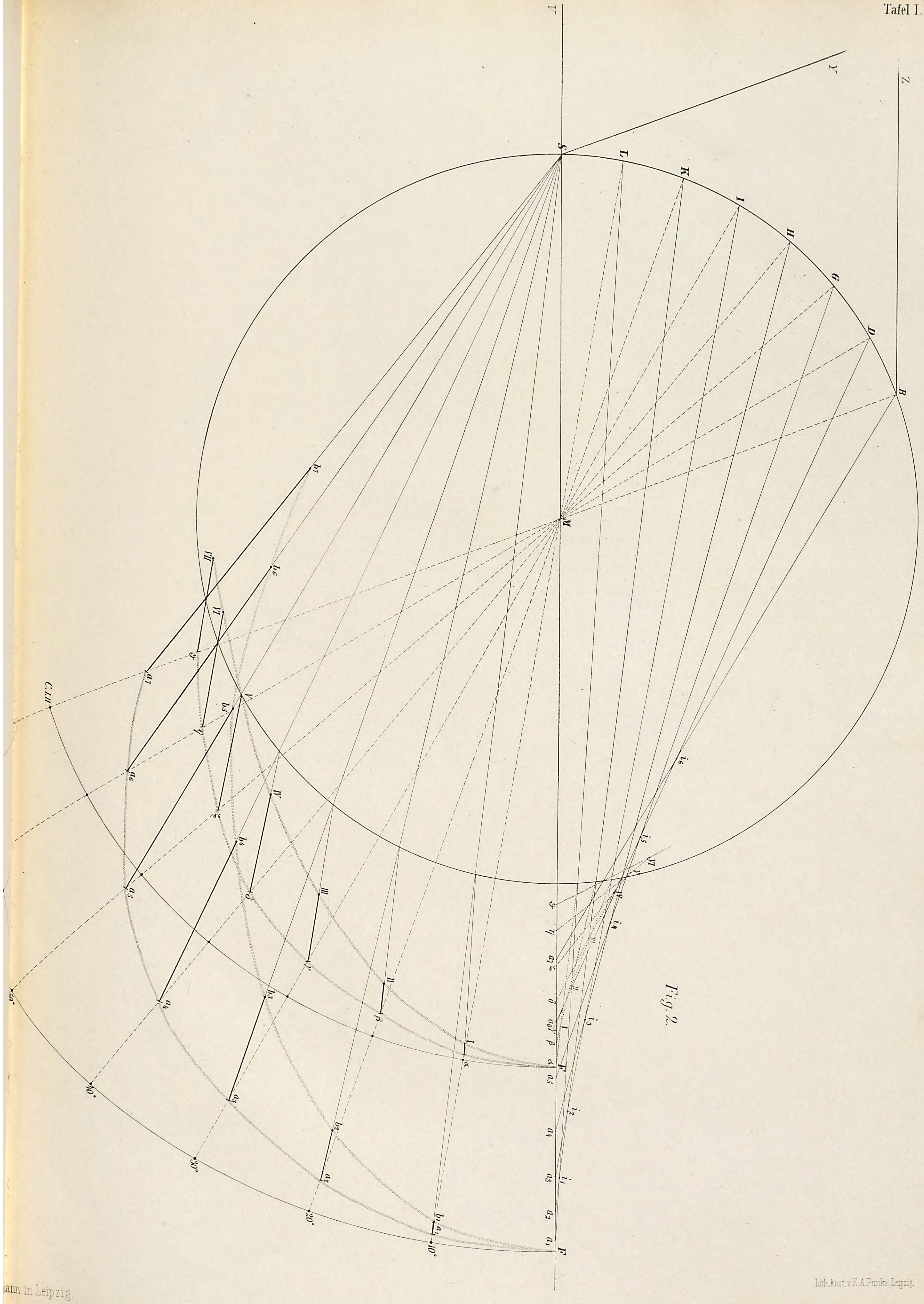


Fig. 2.

...mann in Leipzig.

Lith. Anst. v. F. A. Funke, Leipzig.

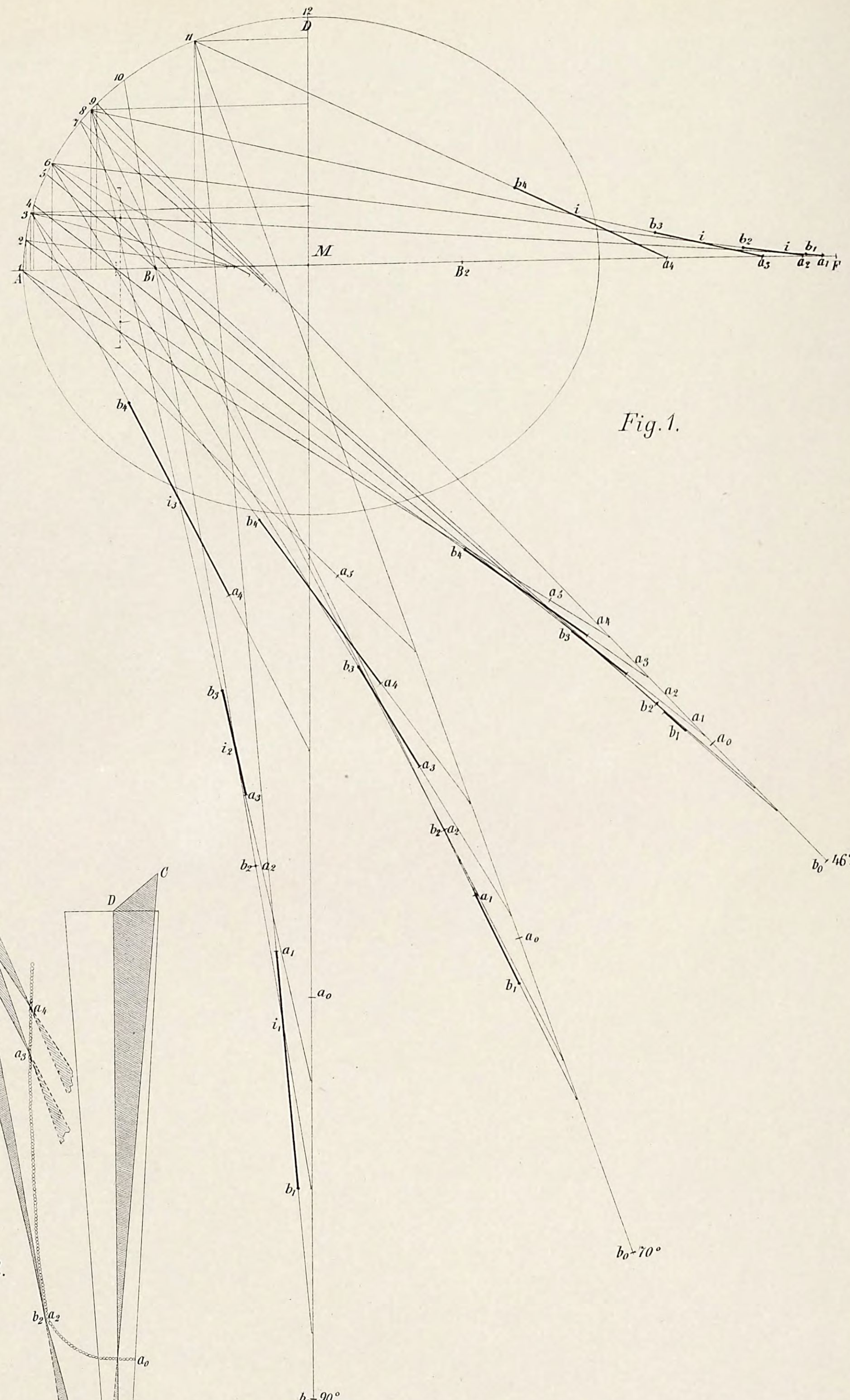


Fig. 1.

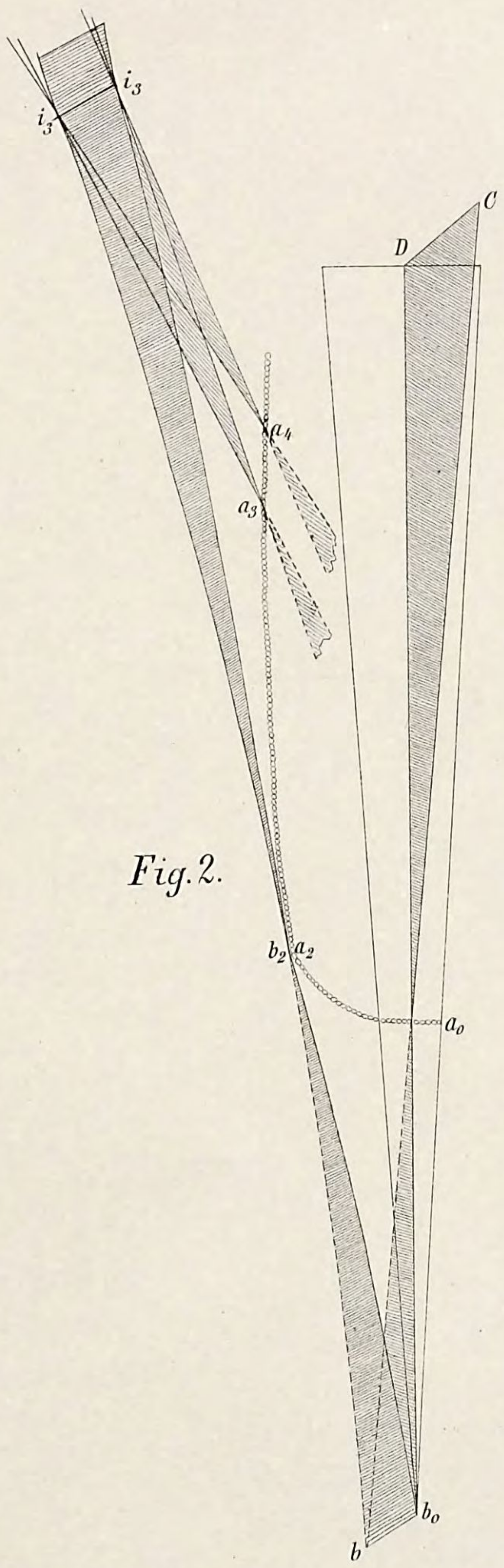
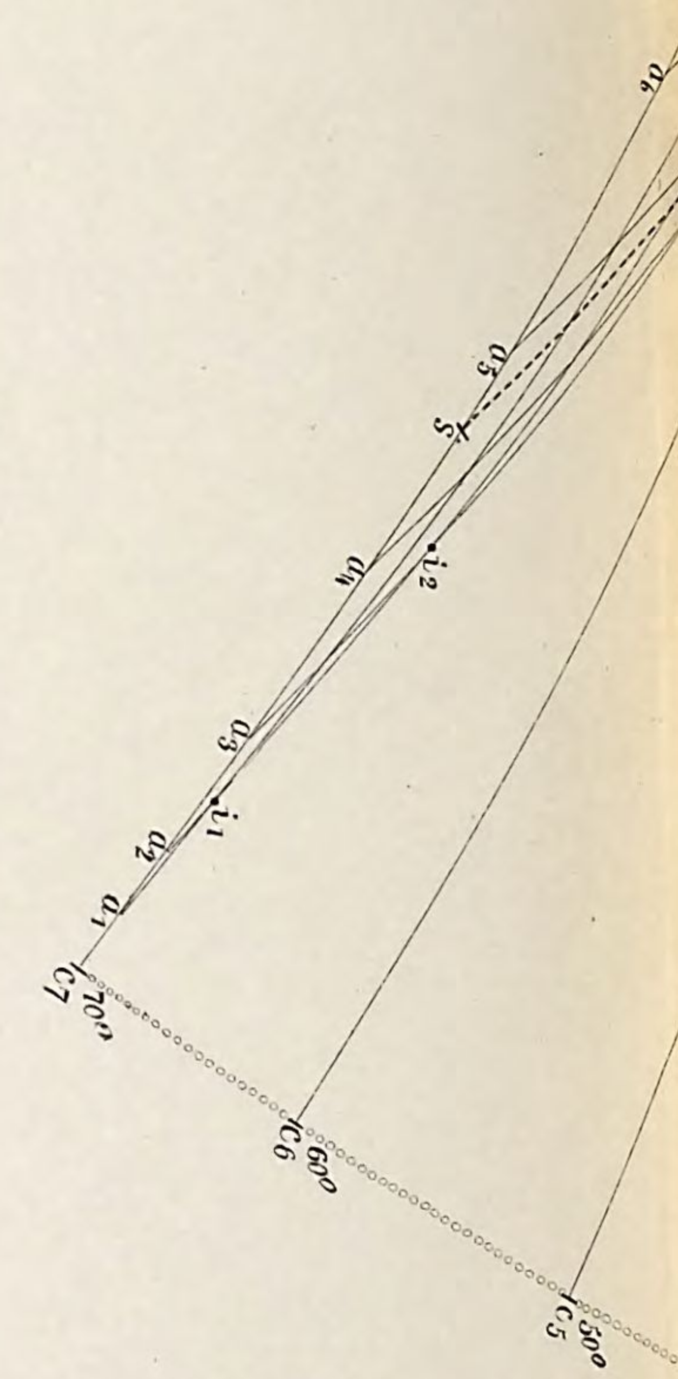
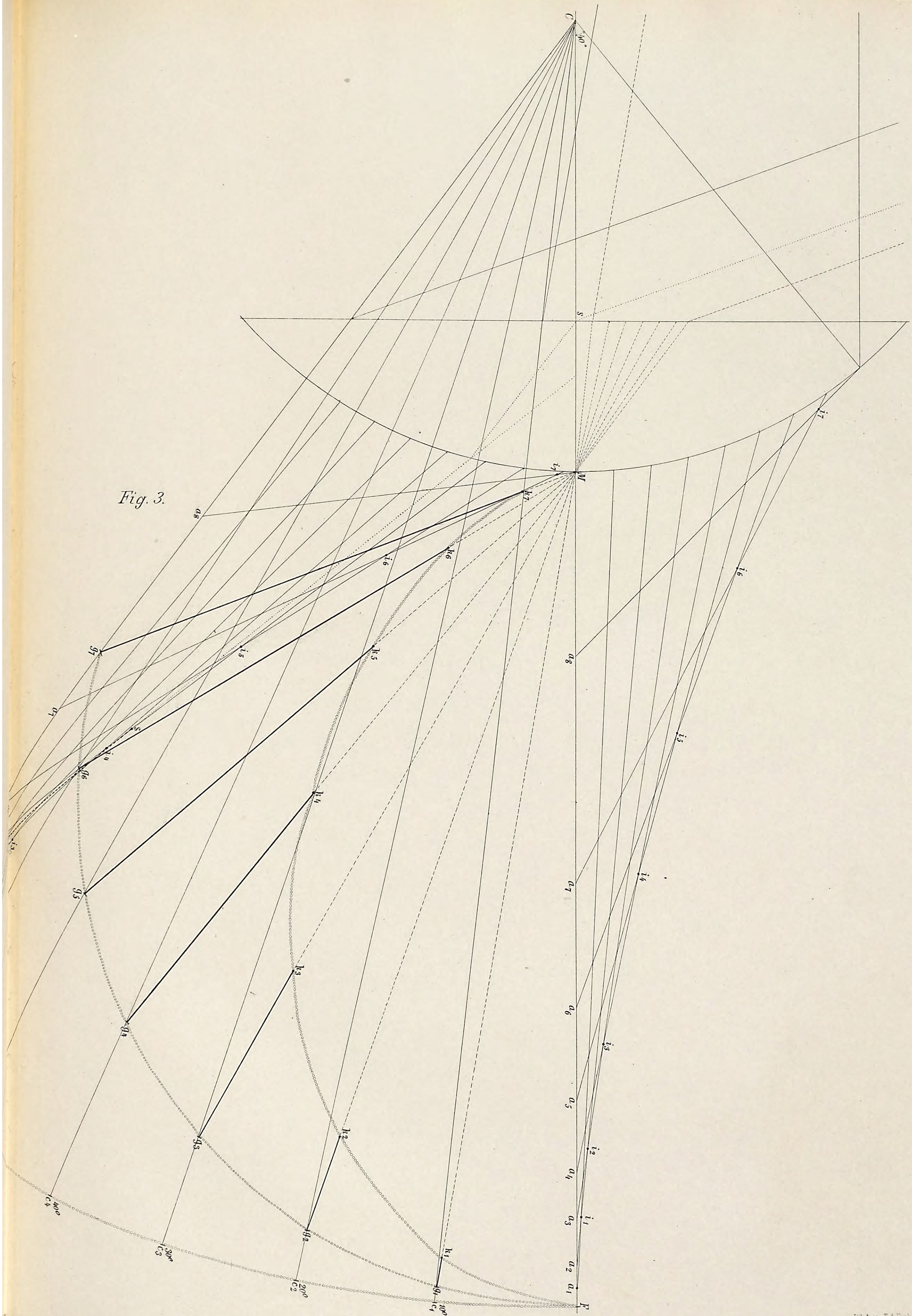


Fig. 2.





ngelmann in Leipzig.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

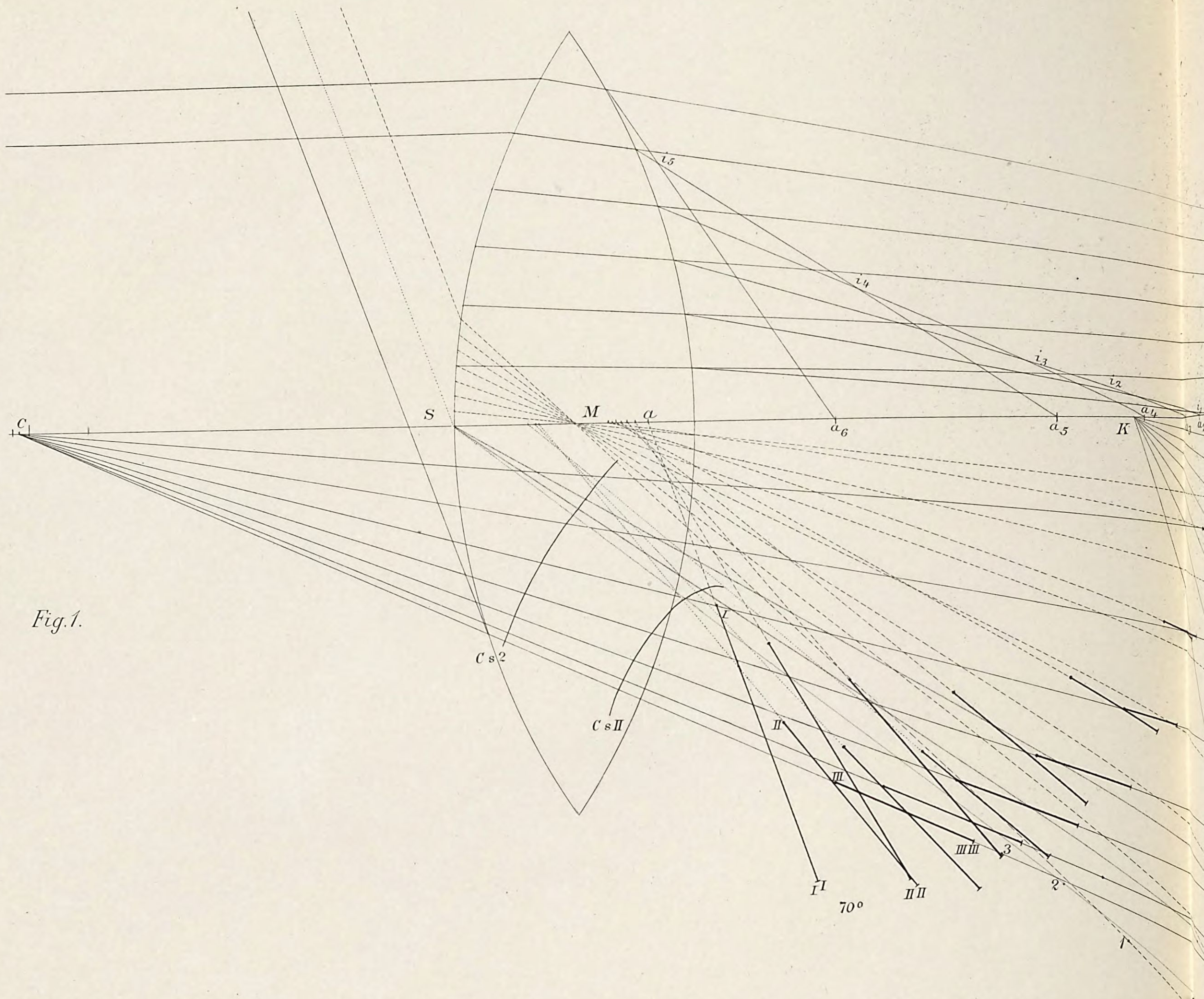


Fig. 1.

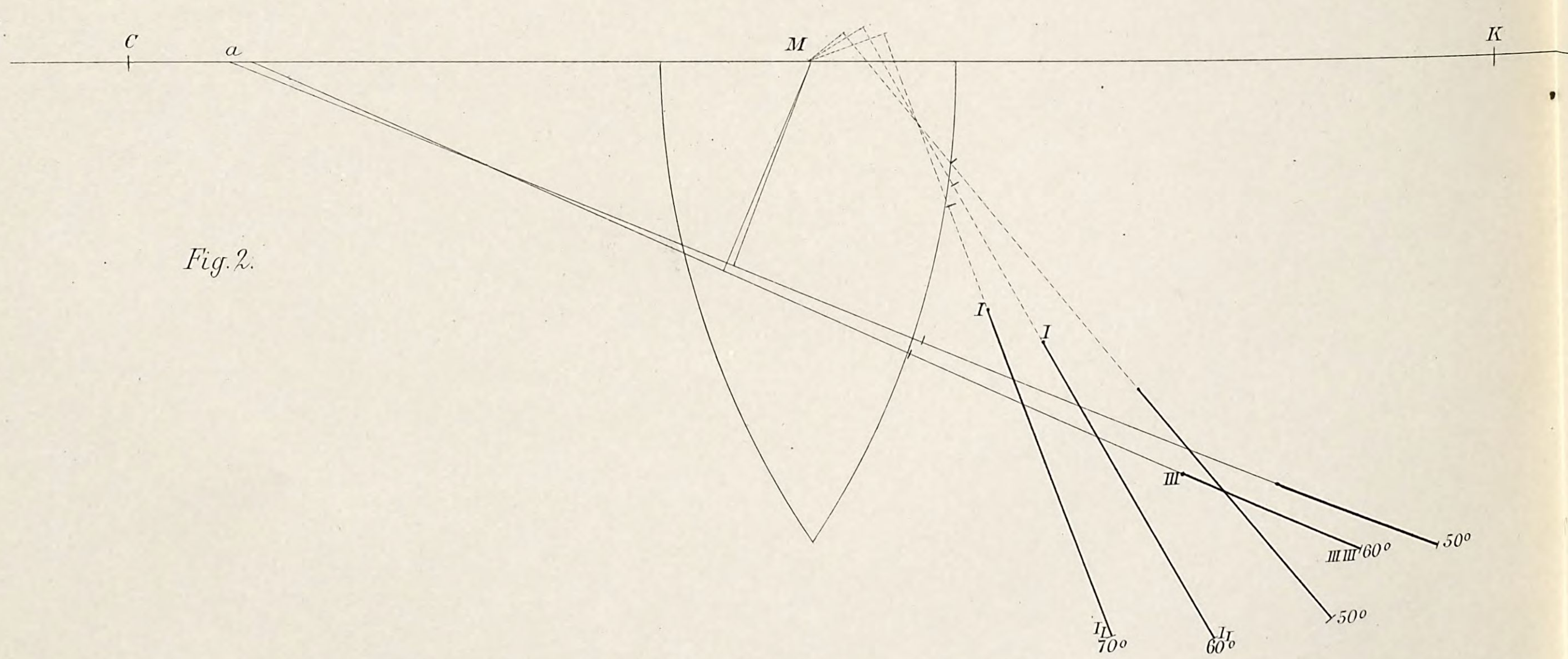
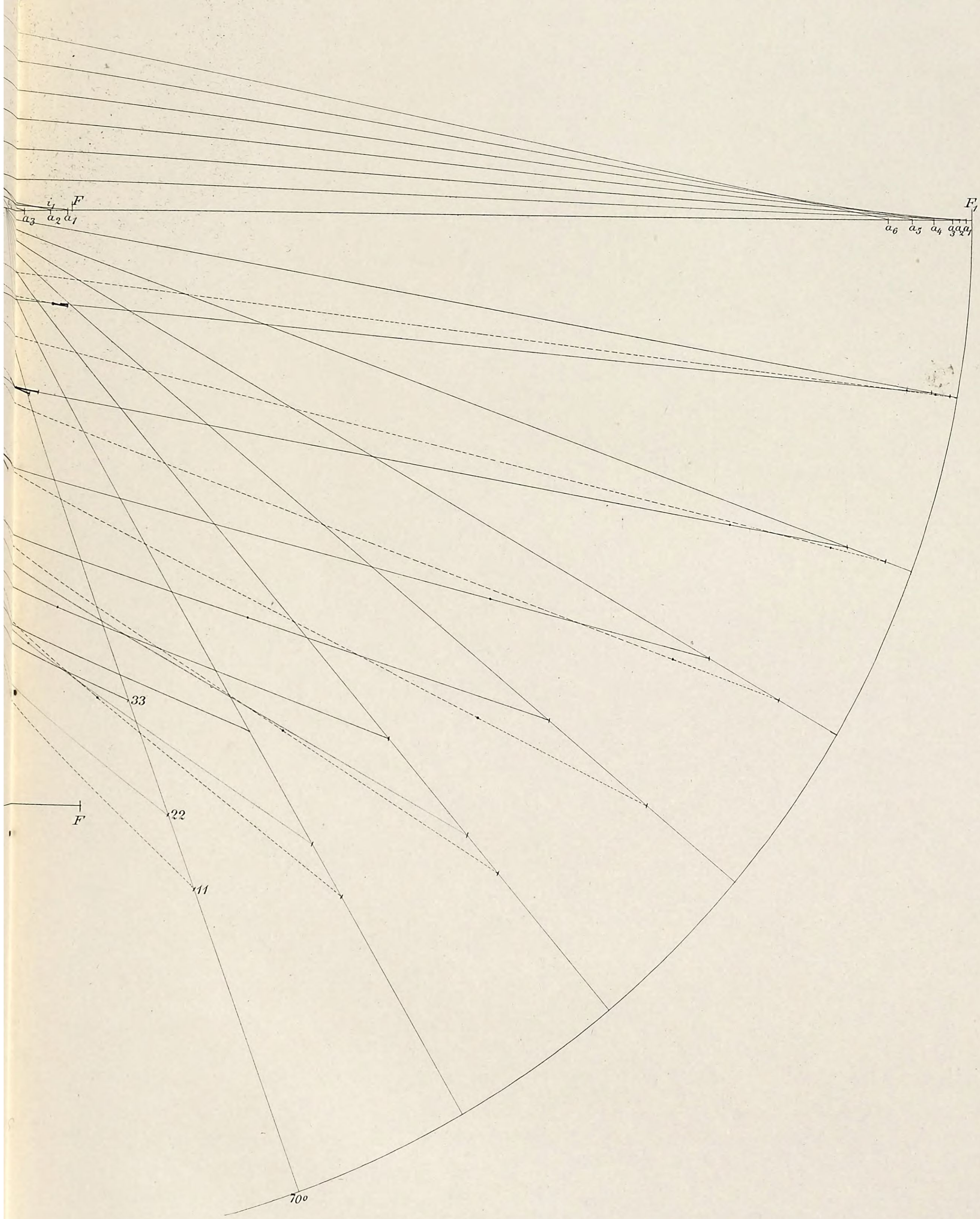


Fig. 2.

Verlag v. W. Engel



lmann in Leipzig.

Lith.Anst.v. E.A. Funke, Leipzig.

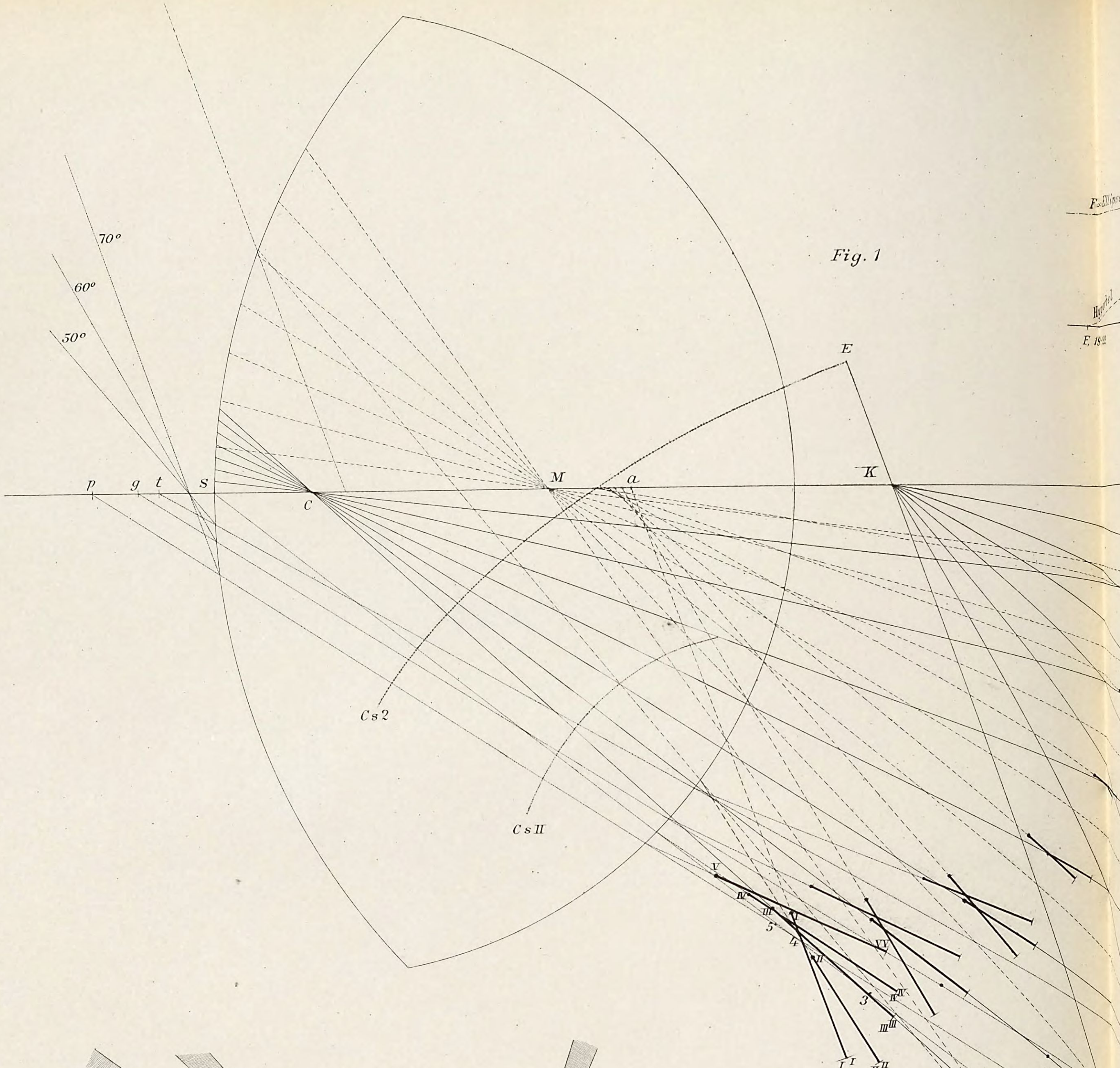


Fig. 1

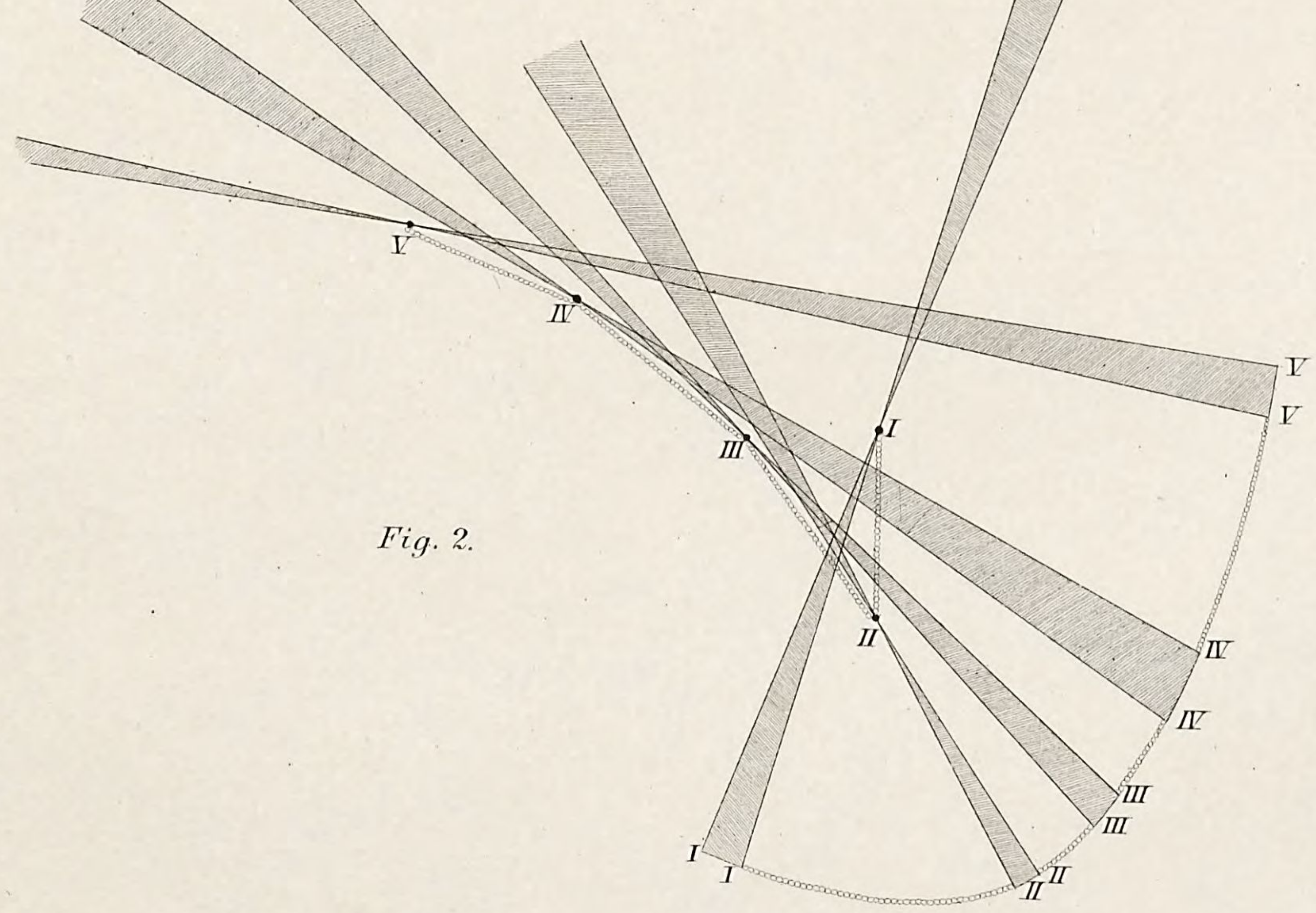
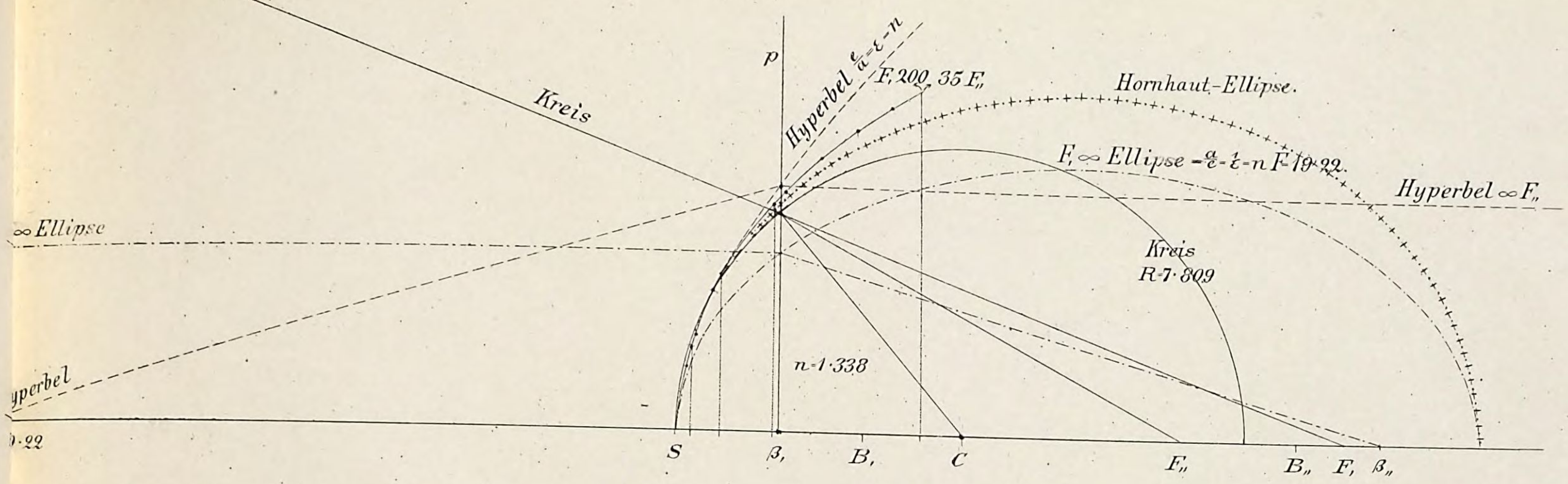
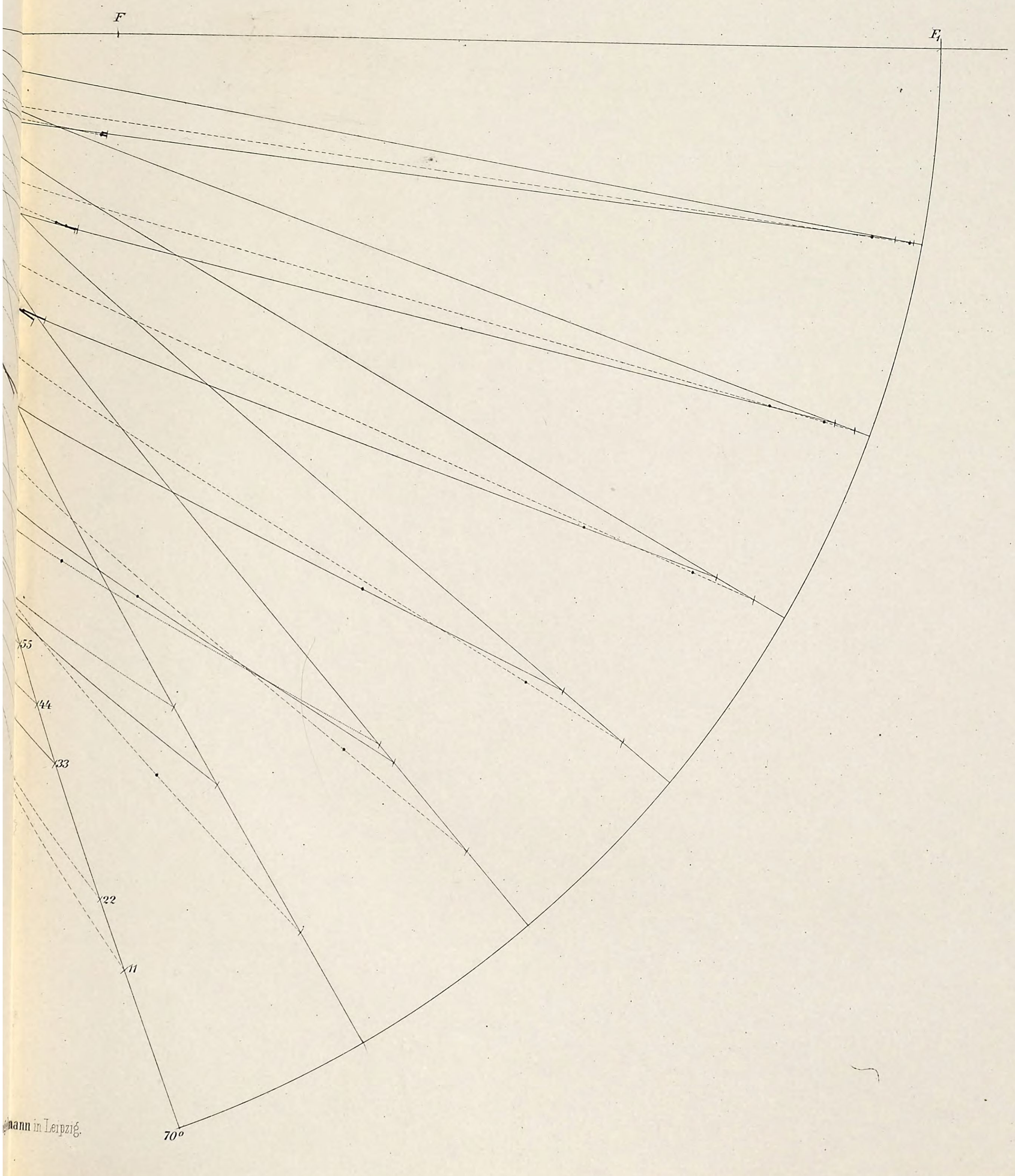


Fig. 2.

Verlag v. W. Engelm

Fig. 3.





...mann in Leipzig.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

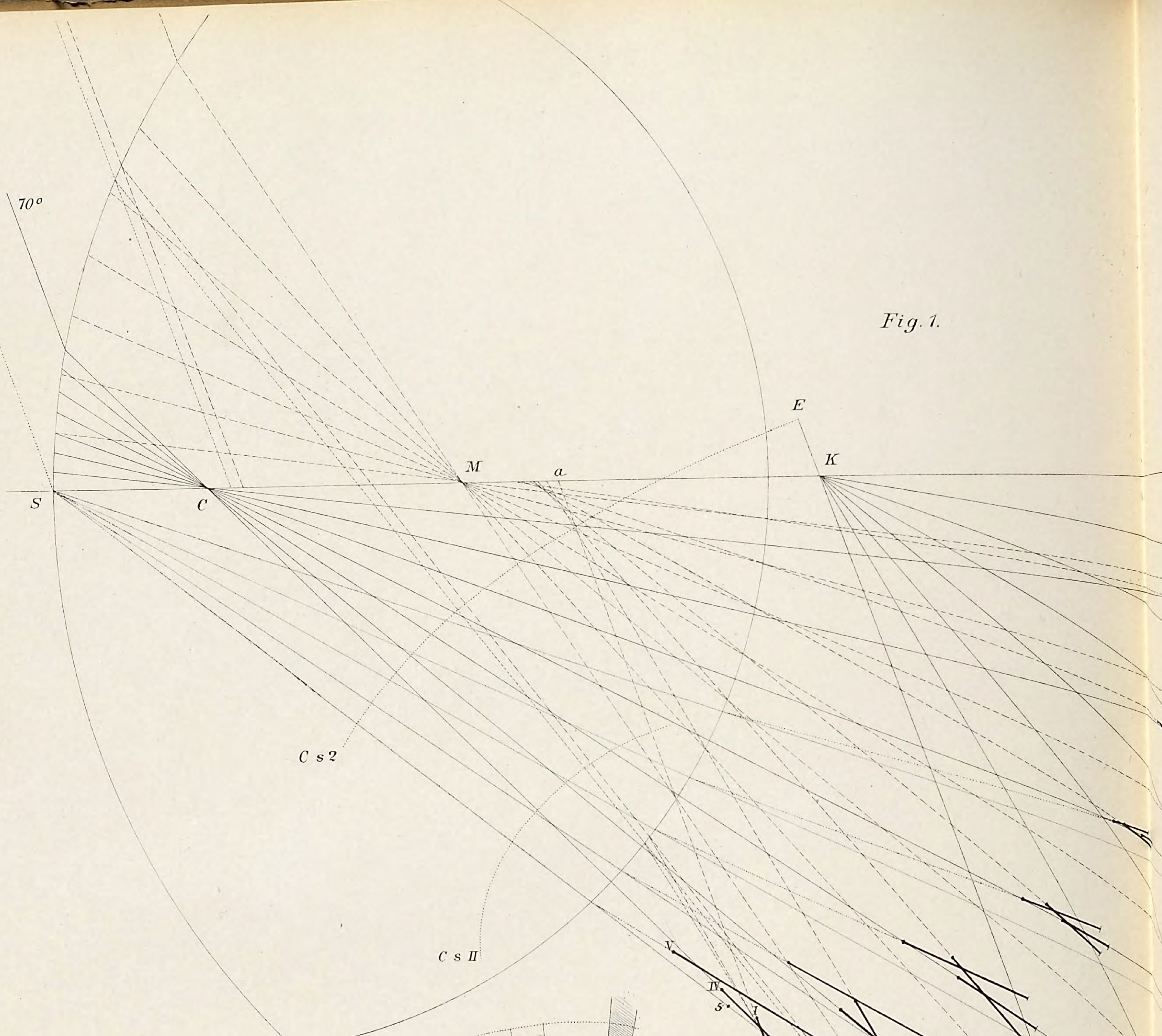


Fig. 1.

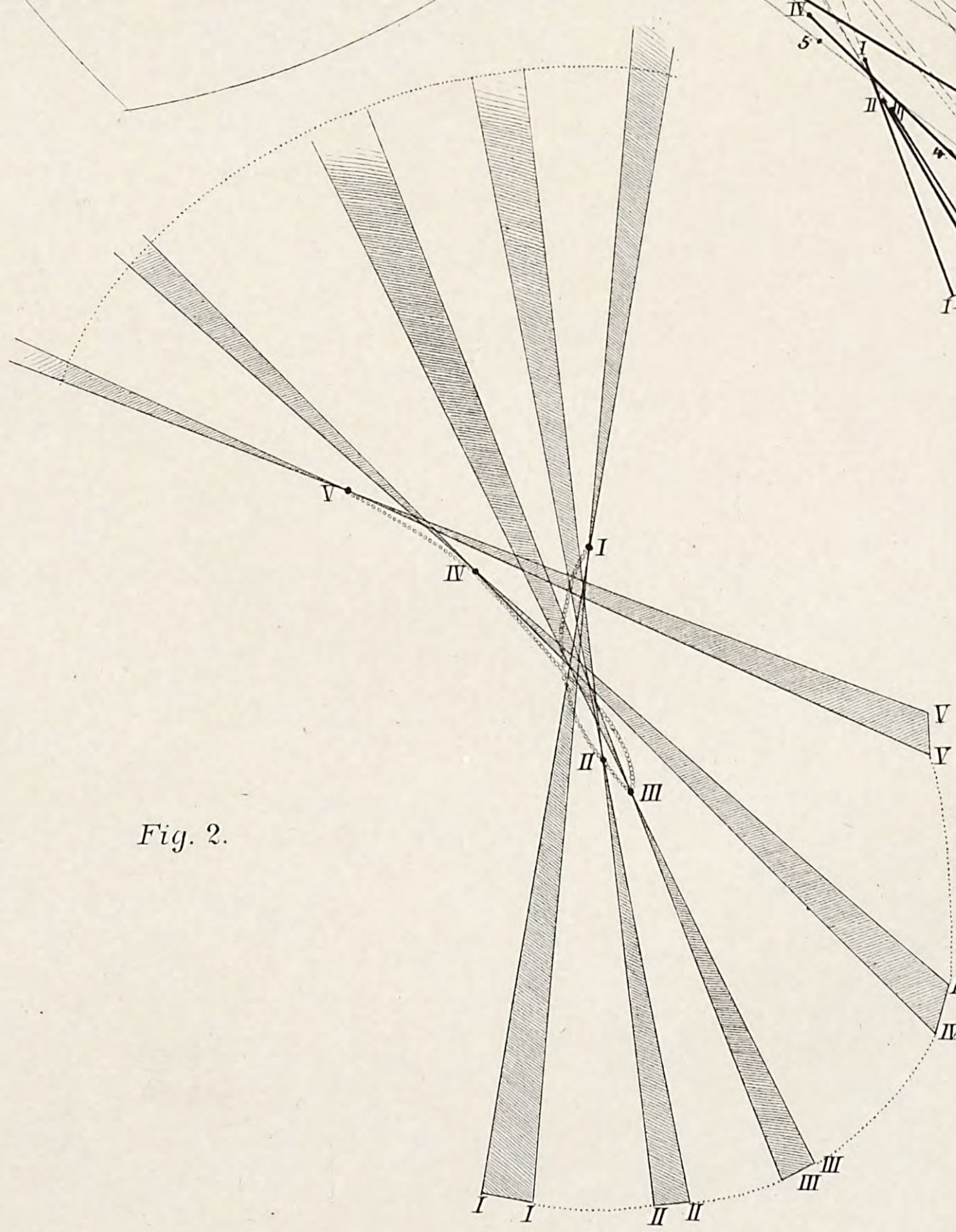
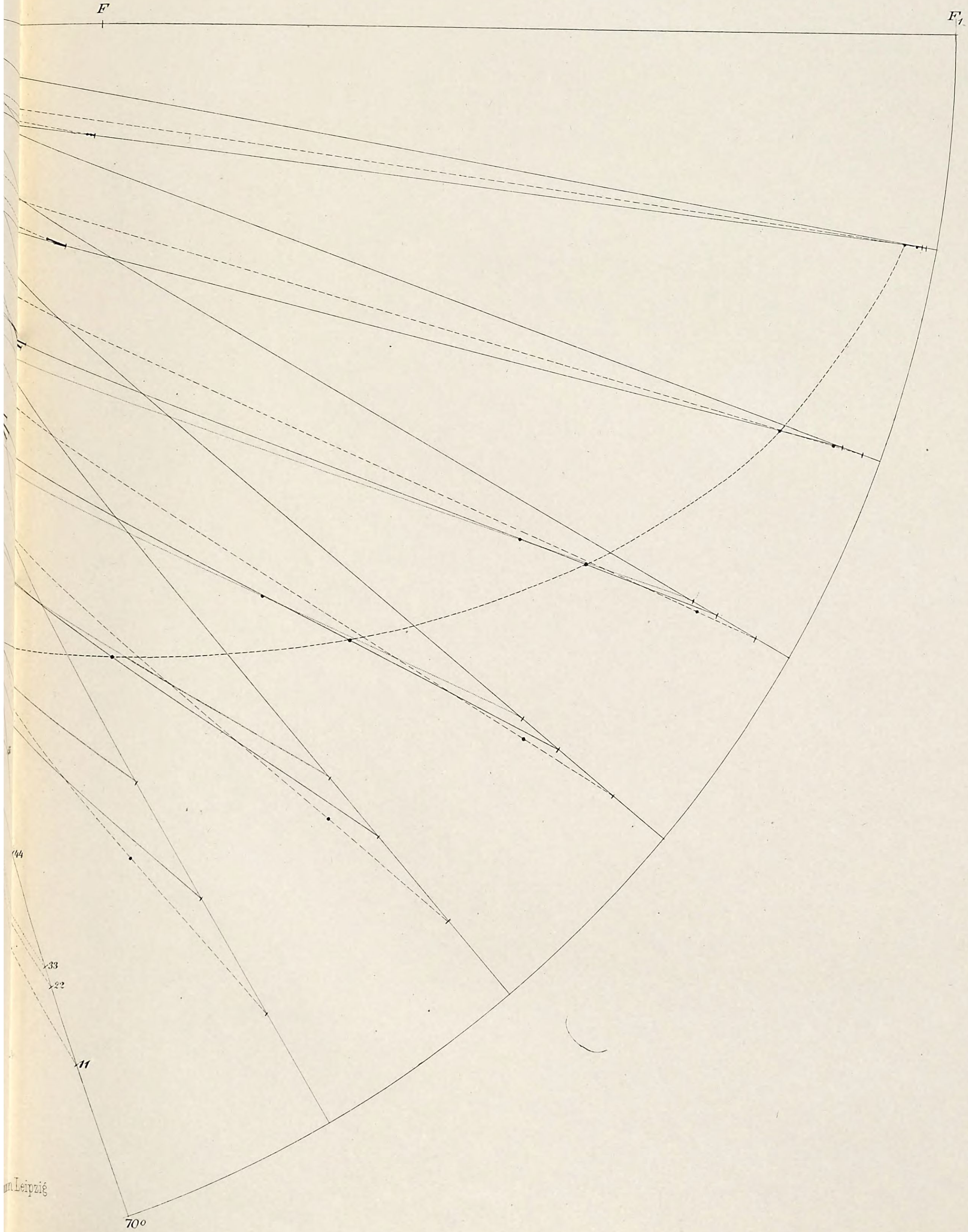


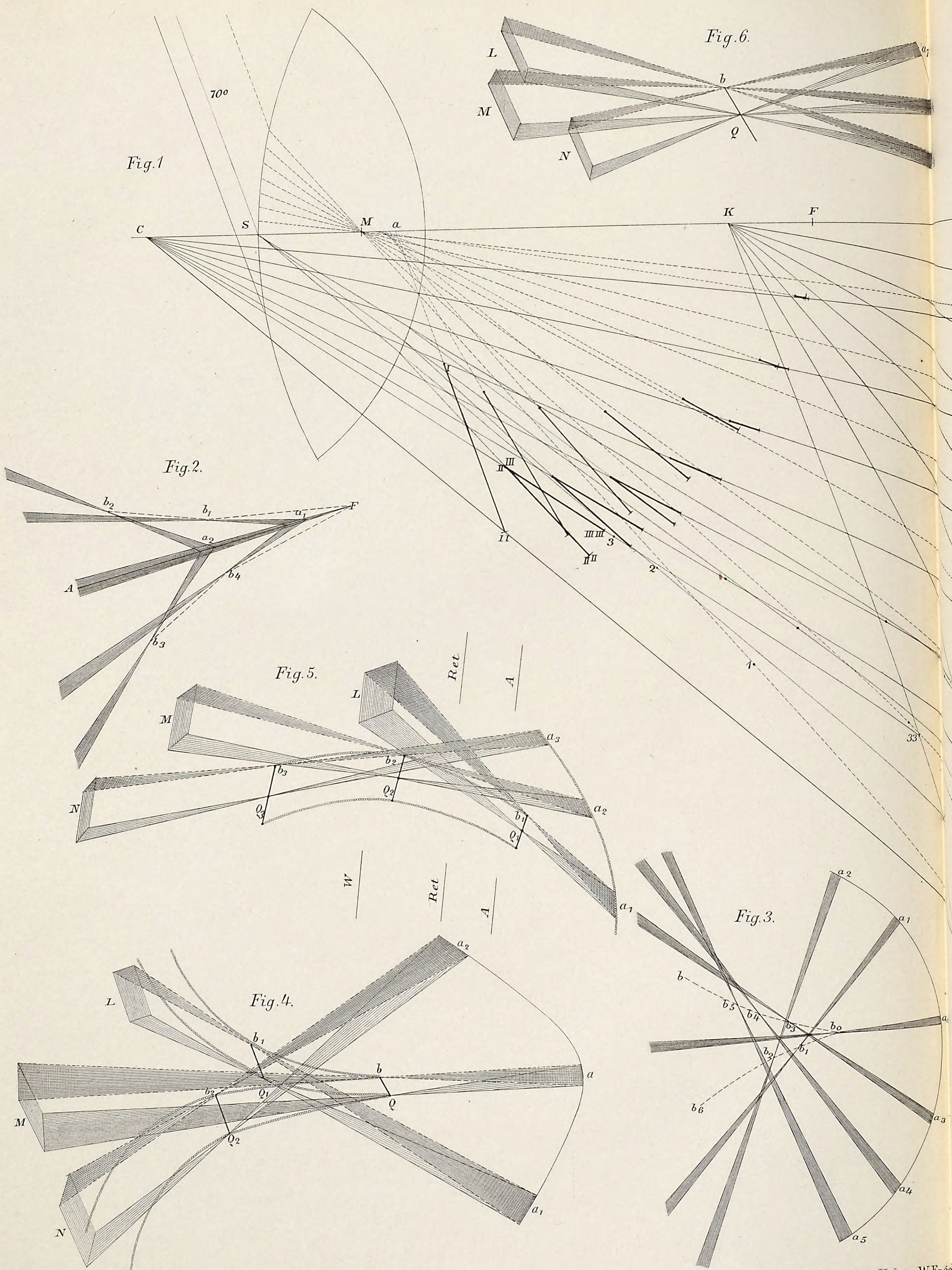
Fig. 2.

Verlag v. W. Engelmann i



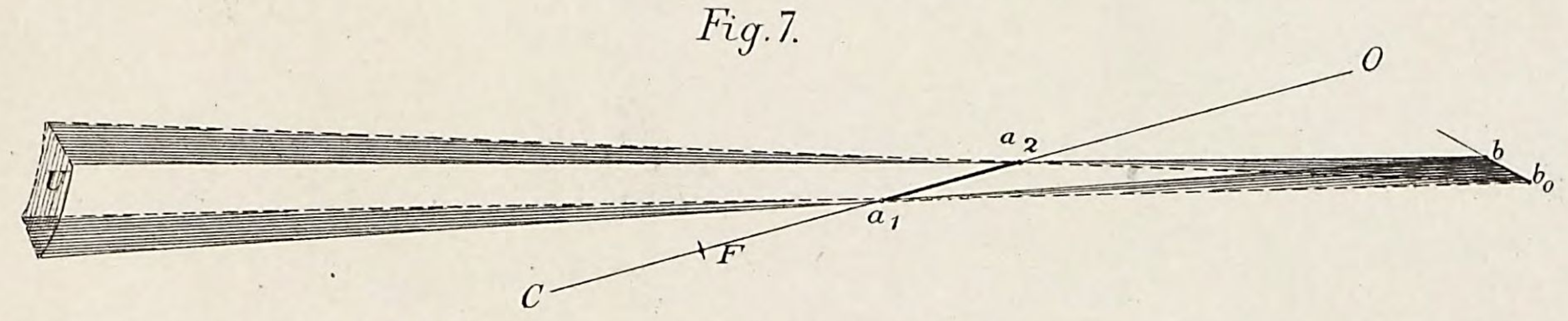
...rn Leipzig

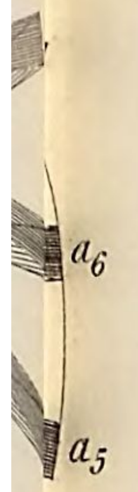
Lith.Anst.v.E.A.Funke, Leipzig.

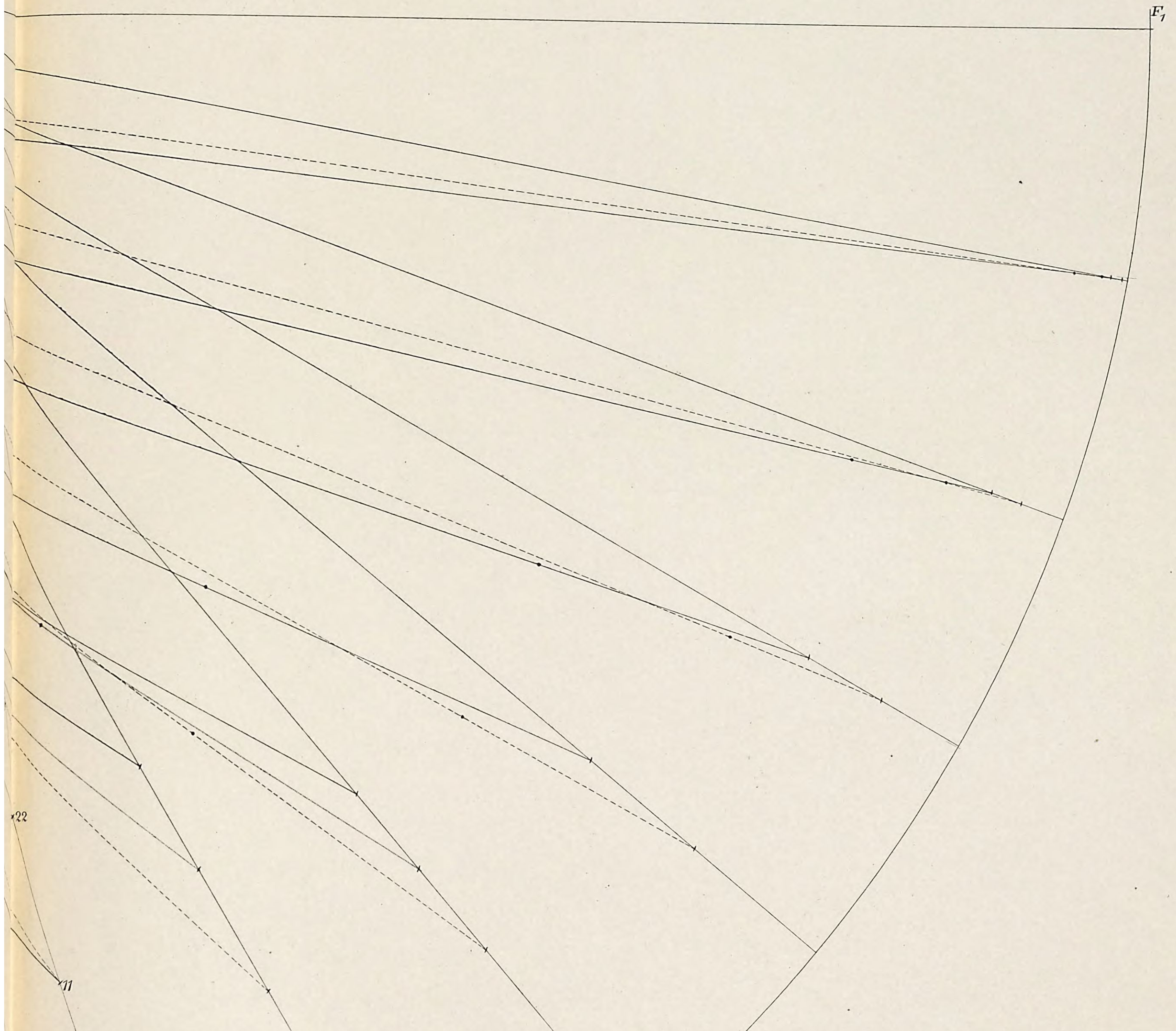


Verlag v. W. Enge

Fig. 7.







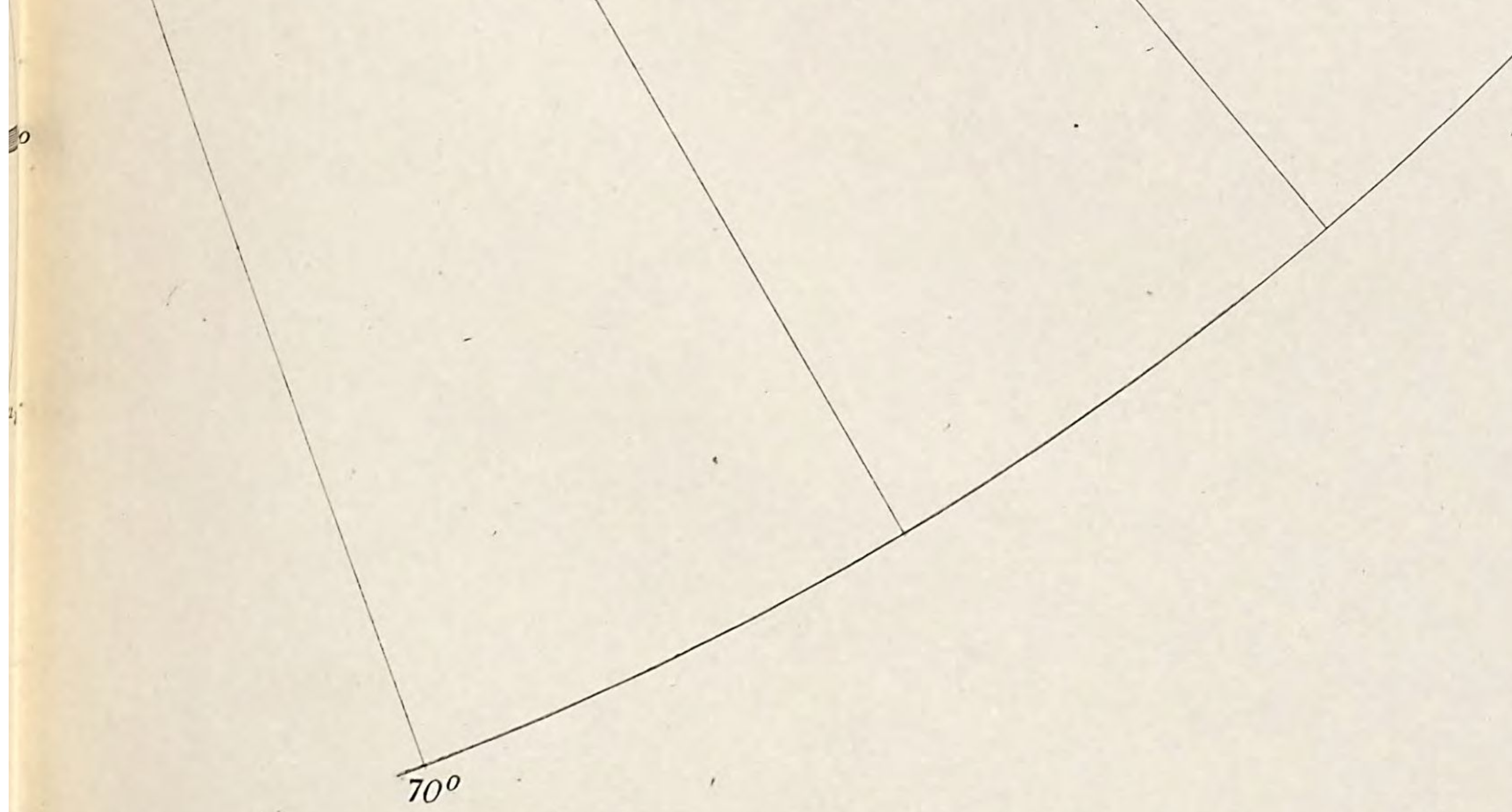
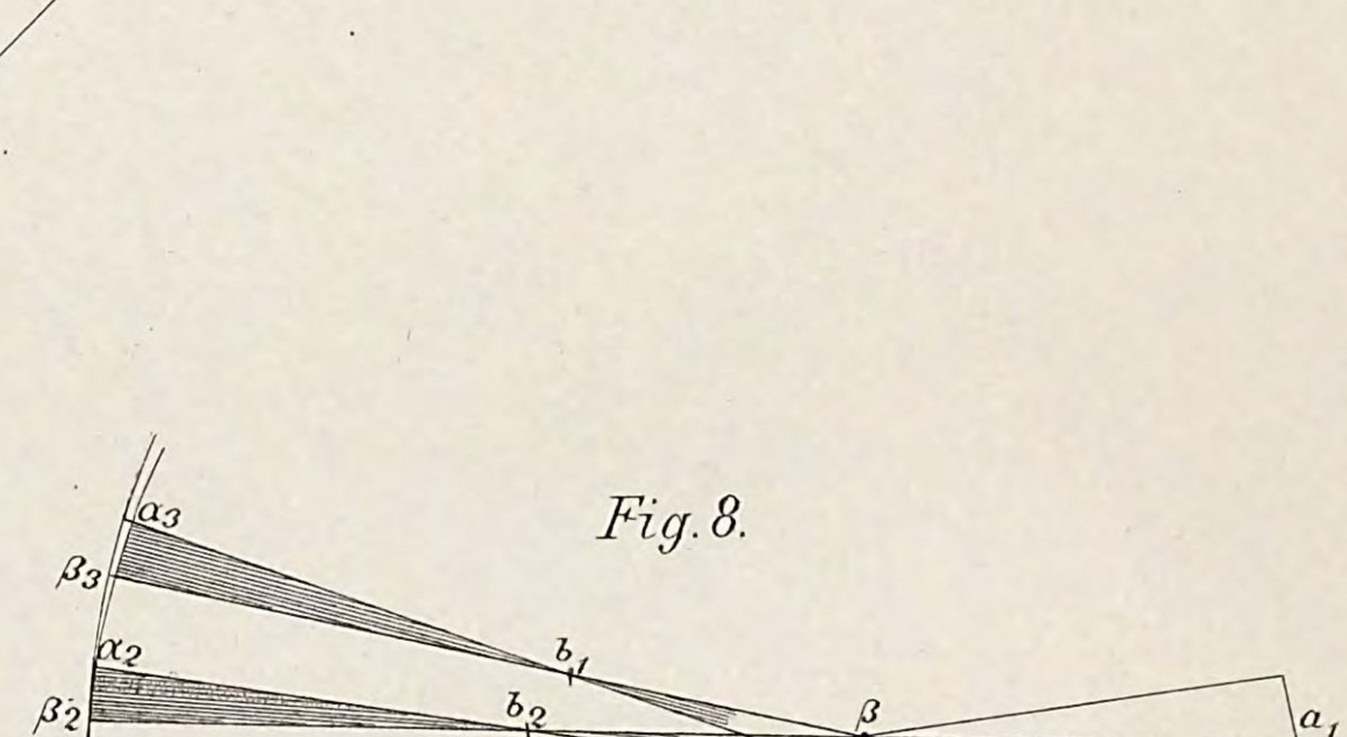


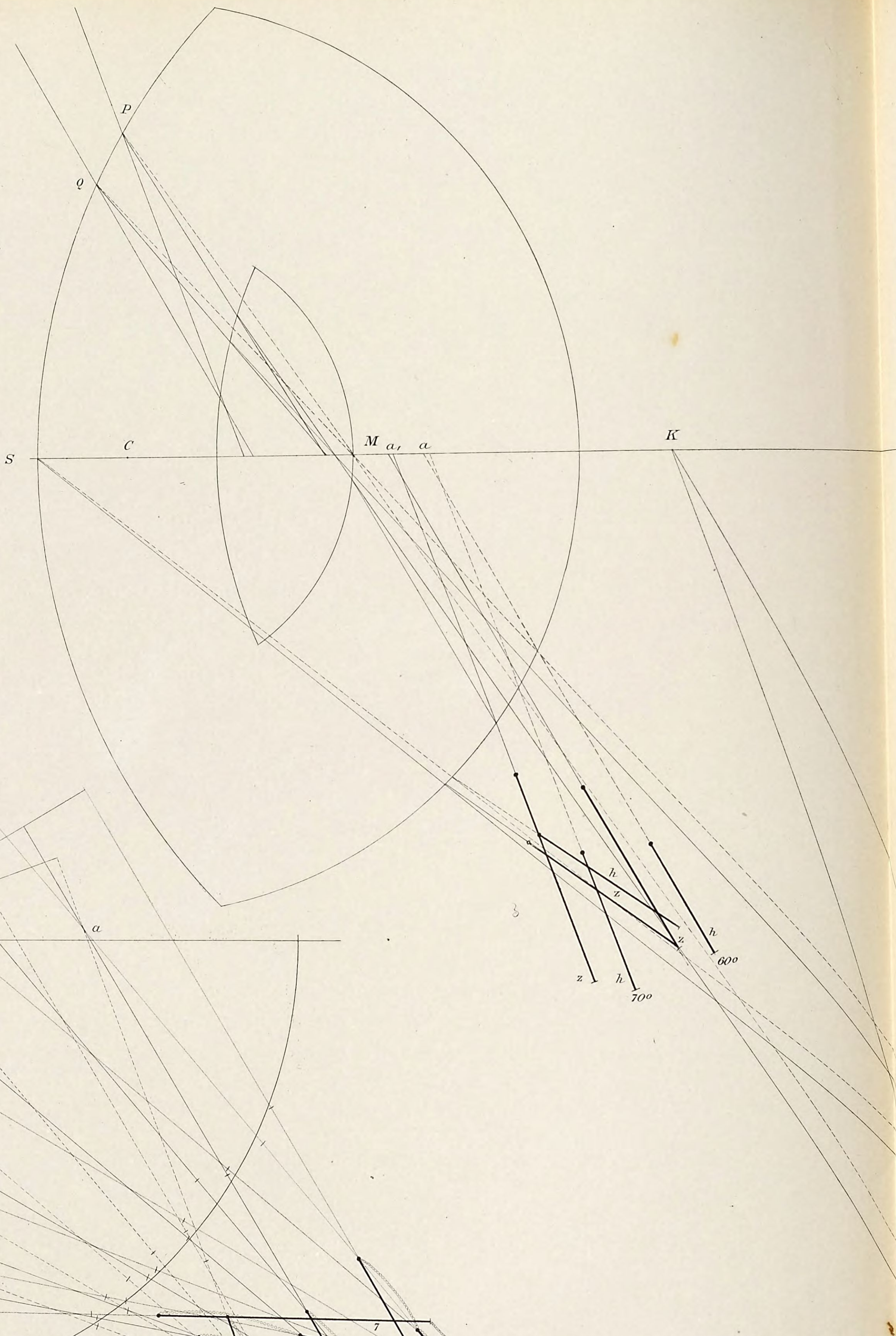
Fig. 8.



...lmann in Leipzig.

Lith.Anst.v.E.A.Funke, Leipzig.

Fig. 4.



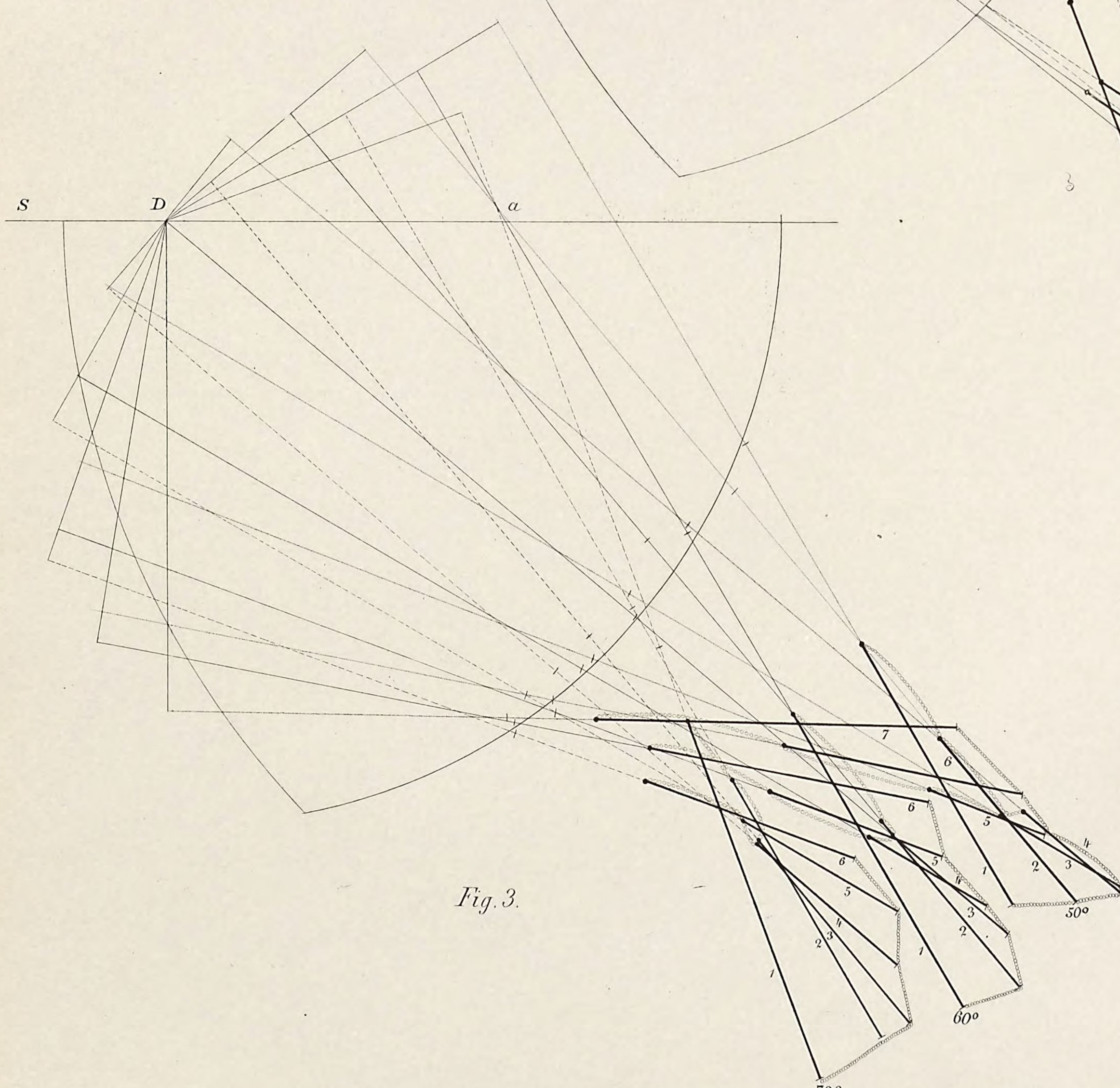


Fig. 3.

Verlag v. W. Engelm

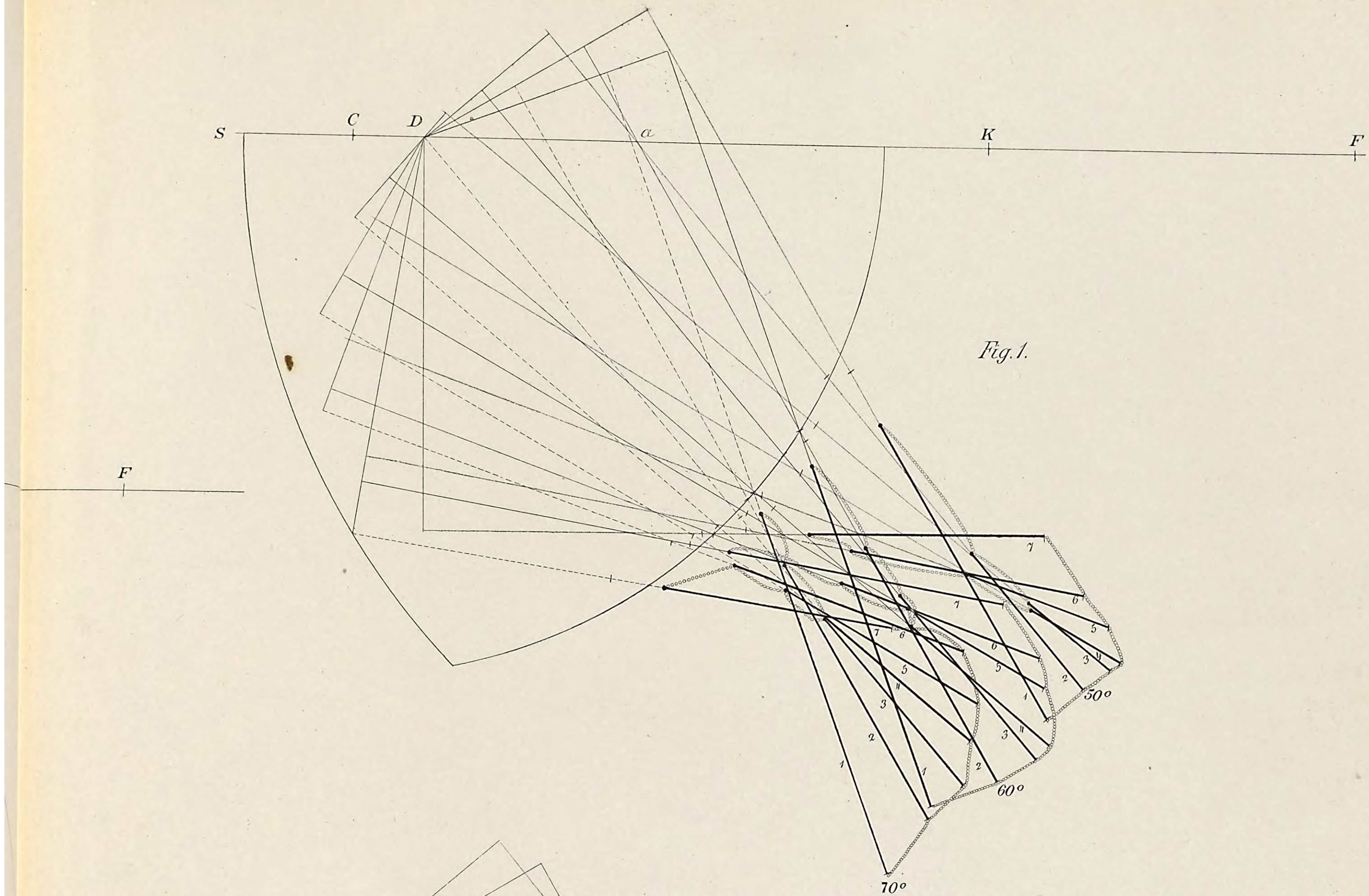


Fig. 1.

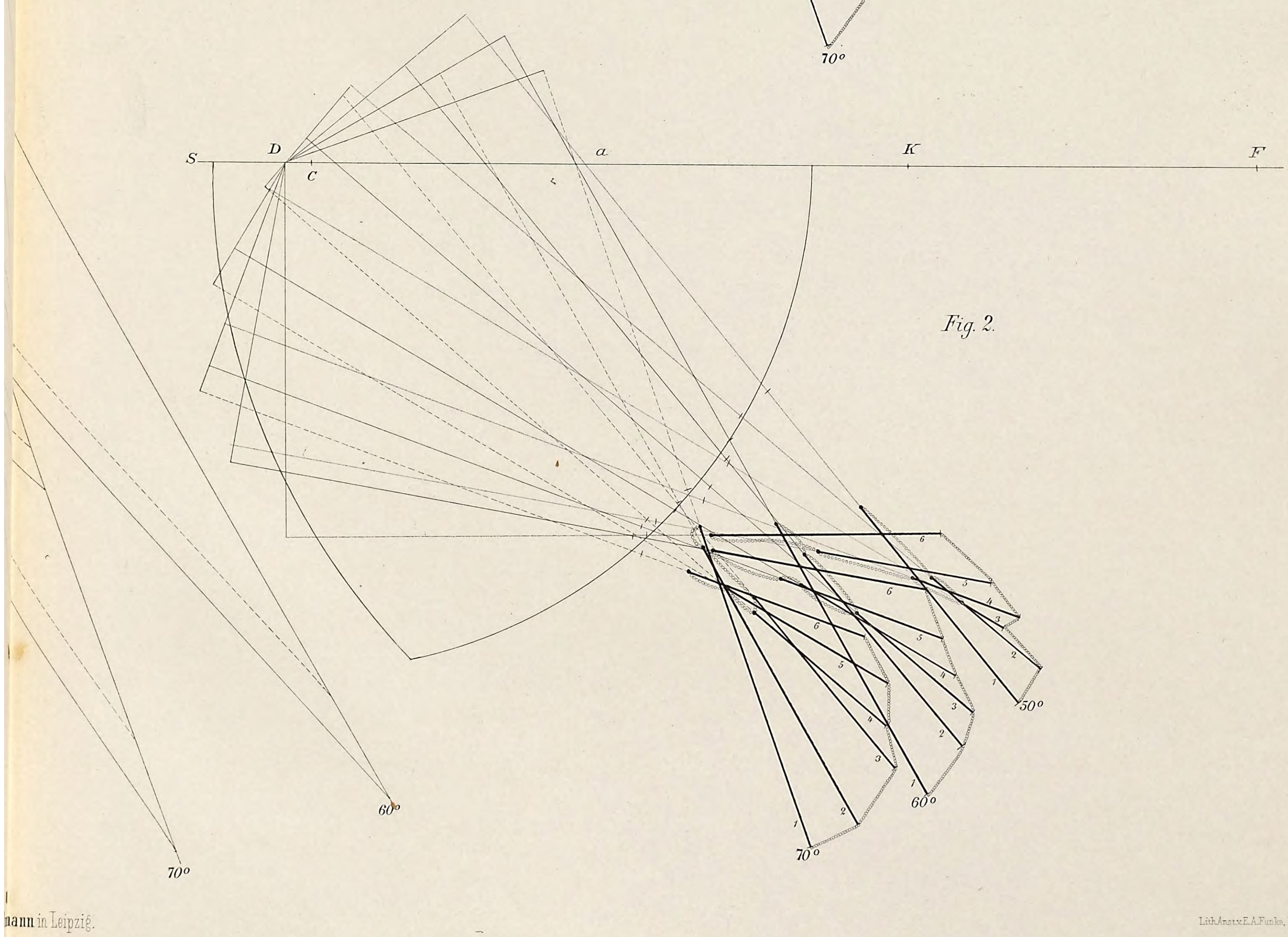


Fig. 2.

Fig. 2.

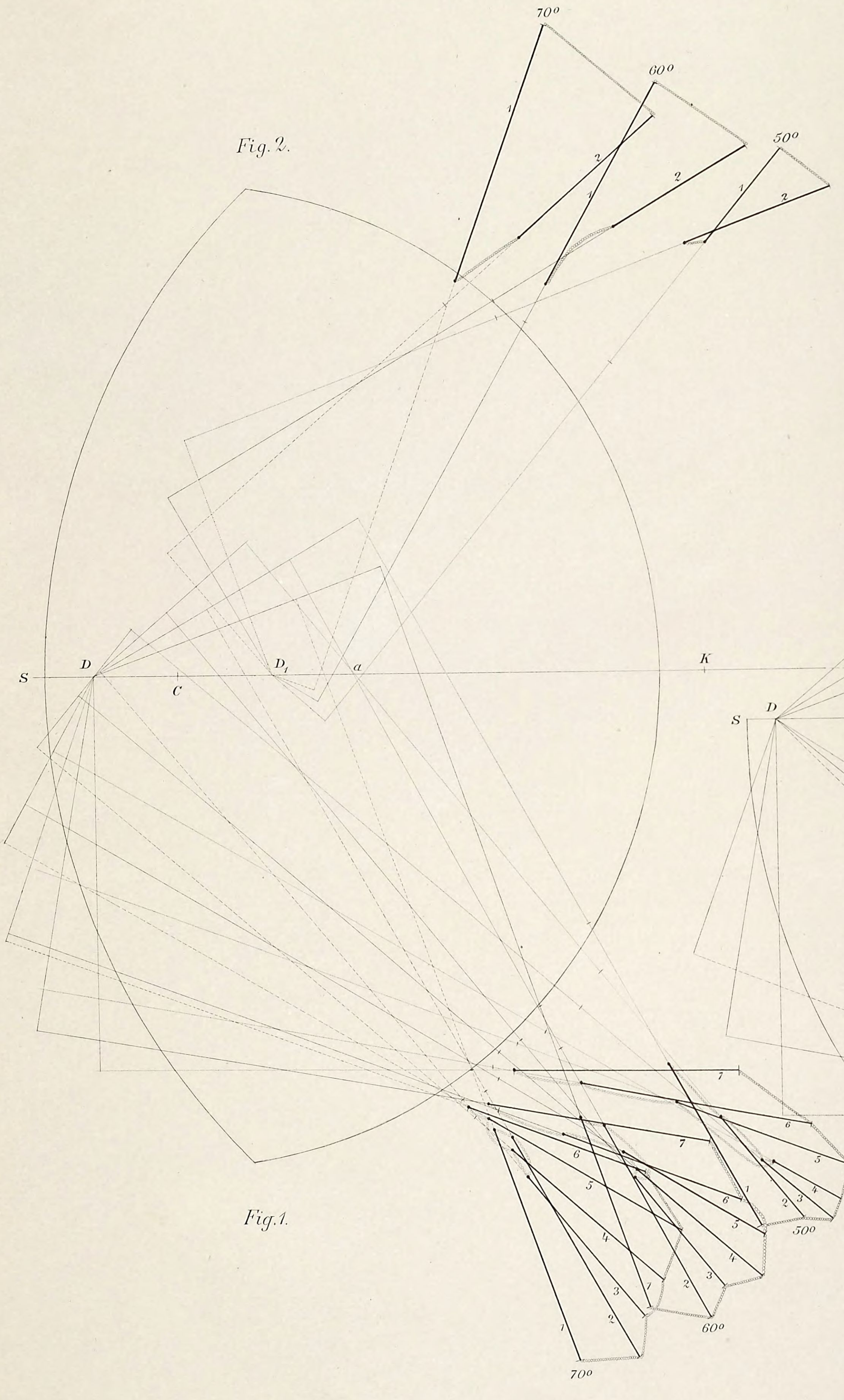


Fig. 1.

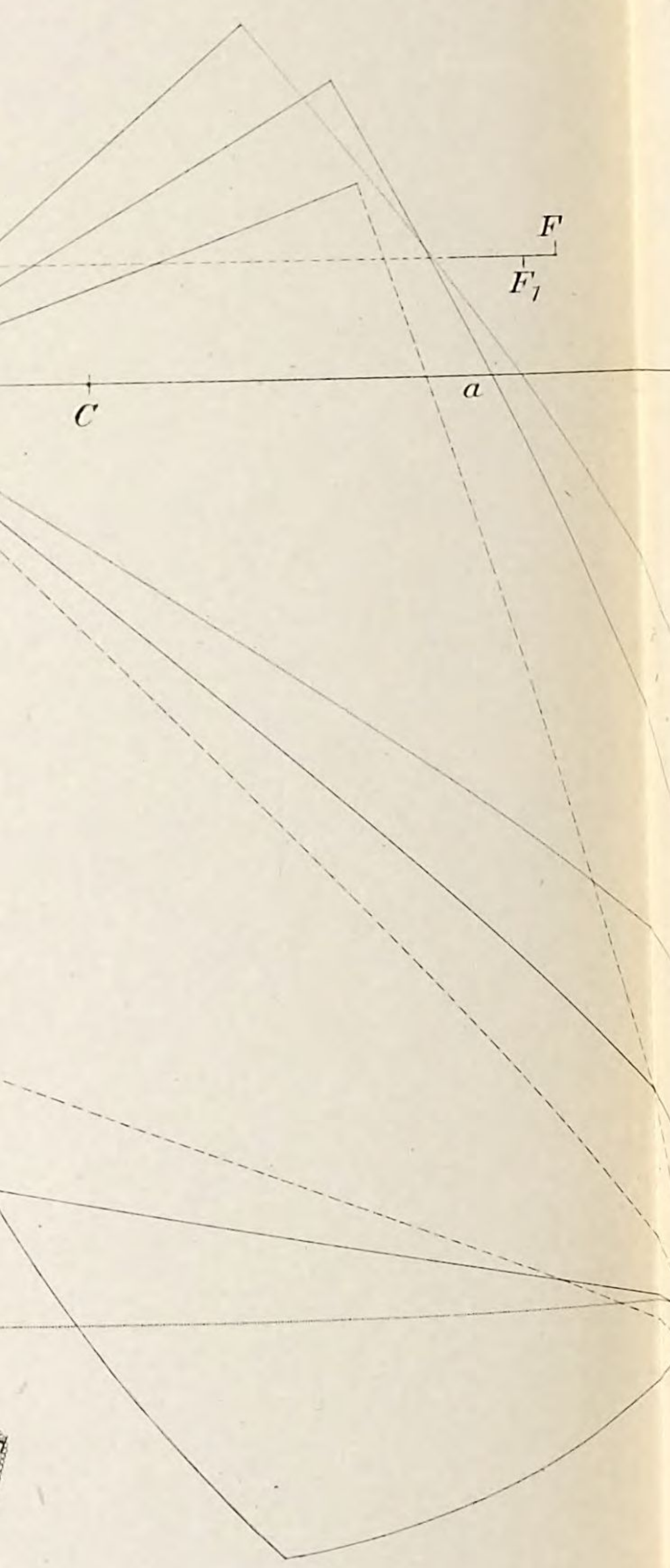
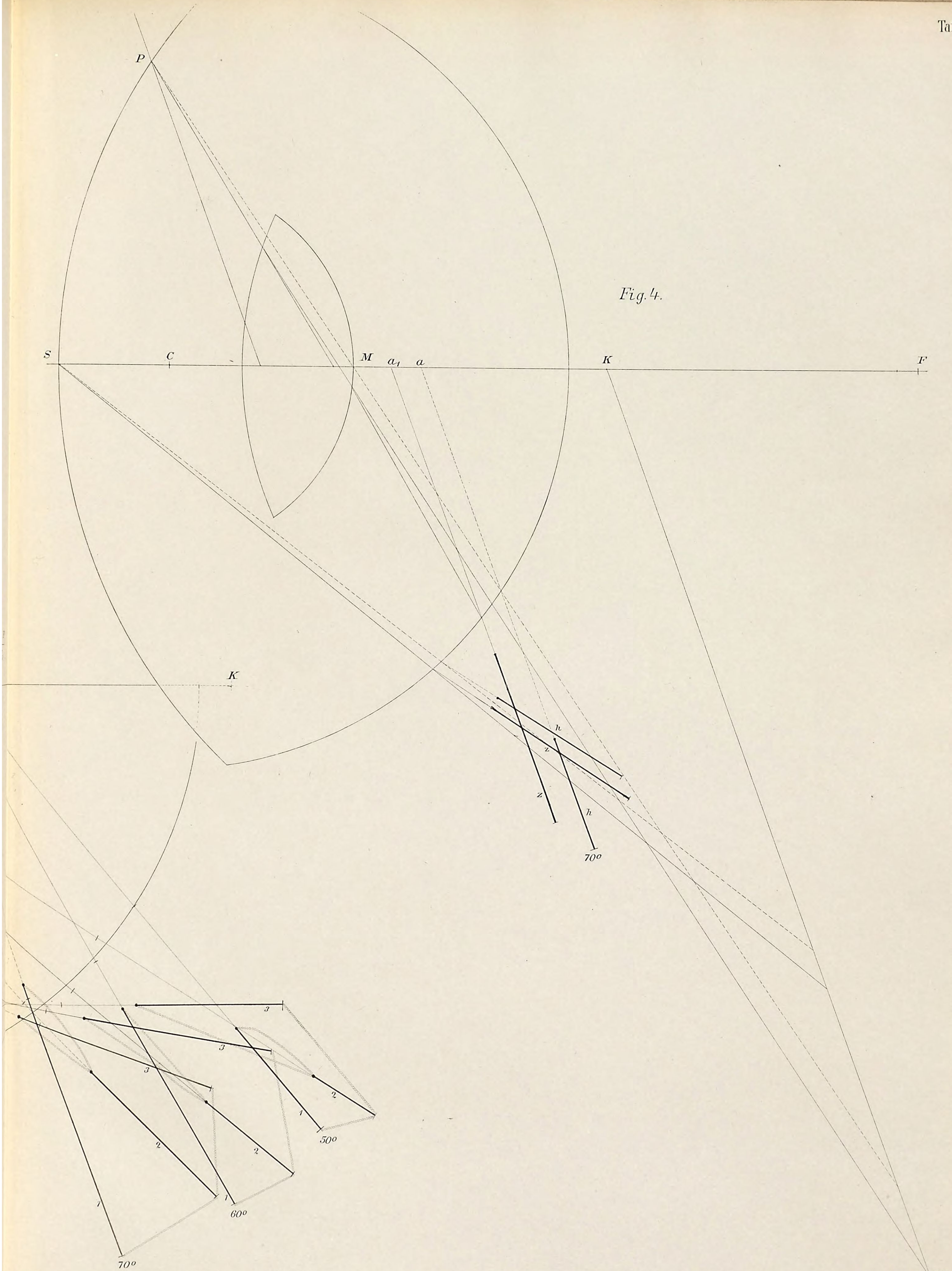


Fig. 3.

Verlag v W. Enge



lmann in Leipzig.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

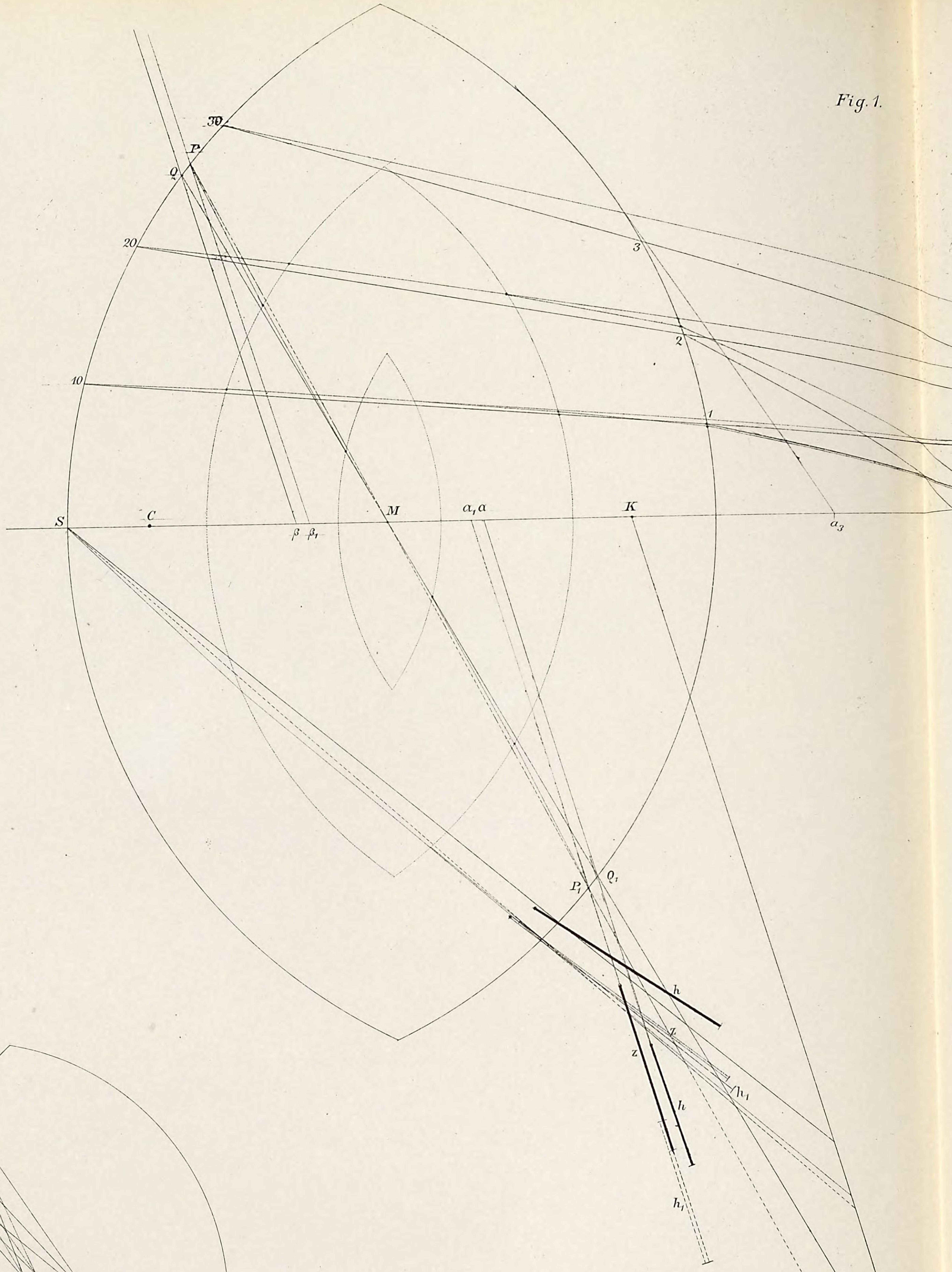


Fig. 1.

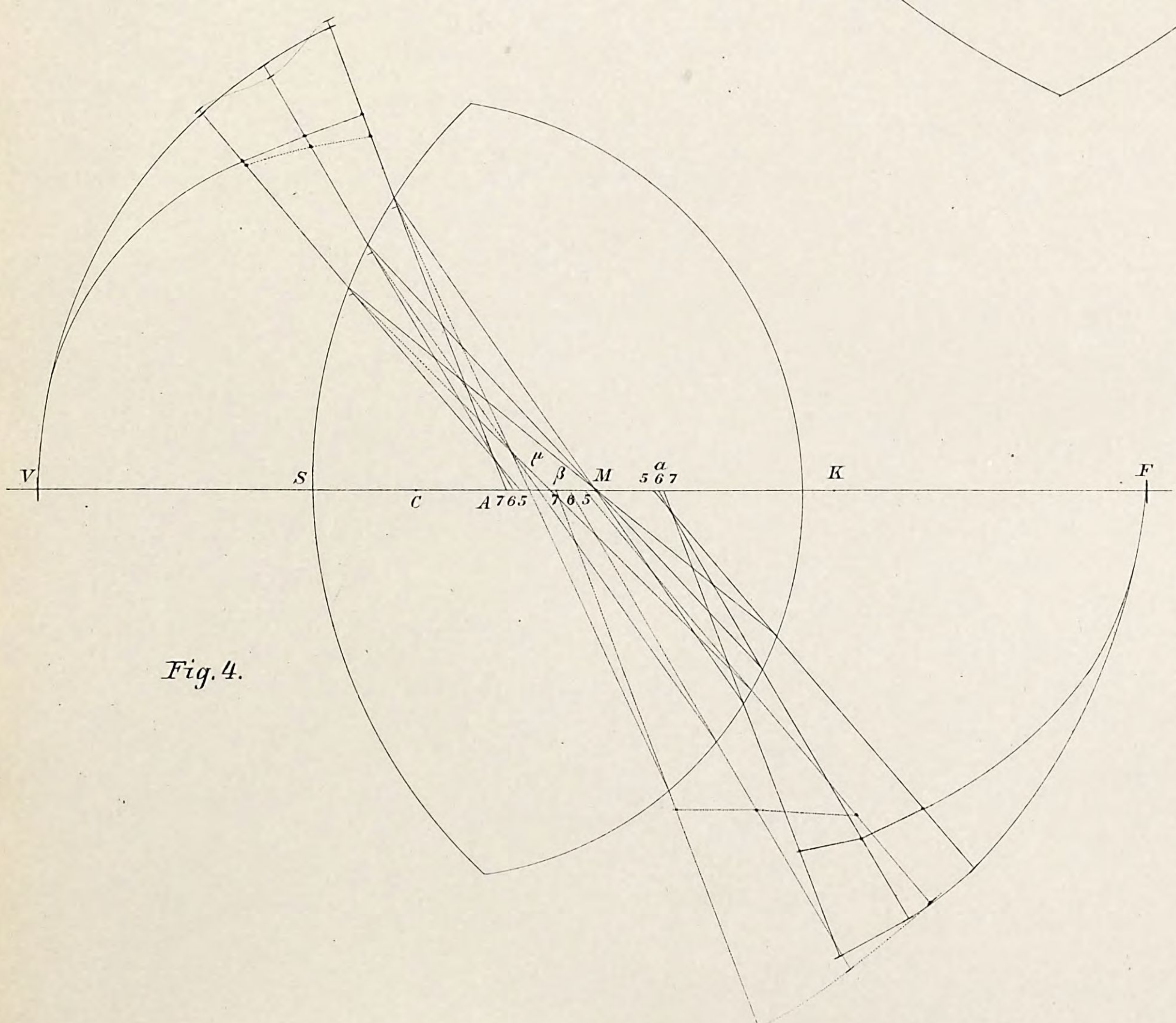
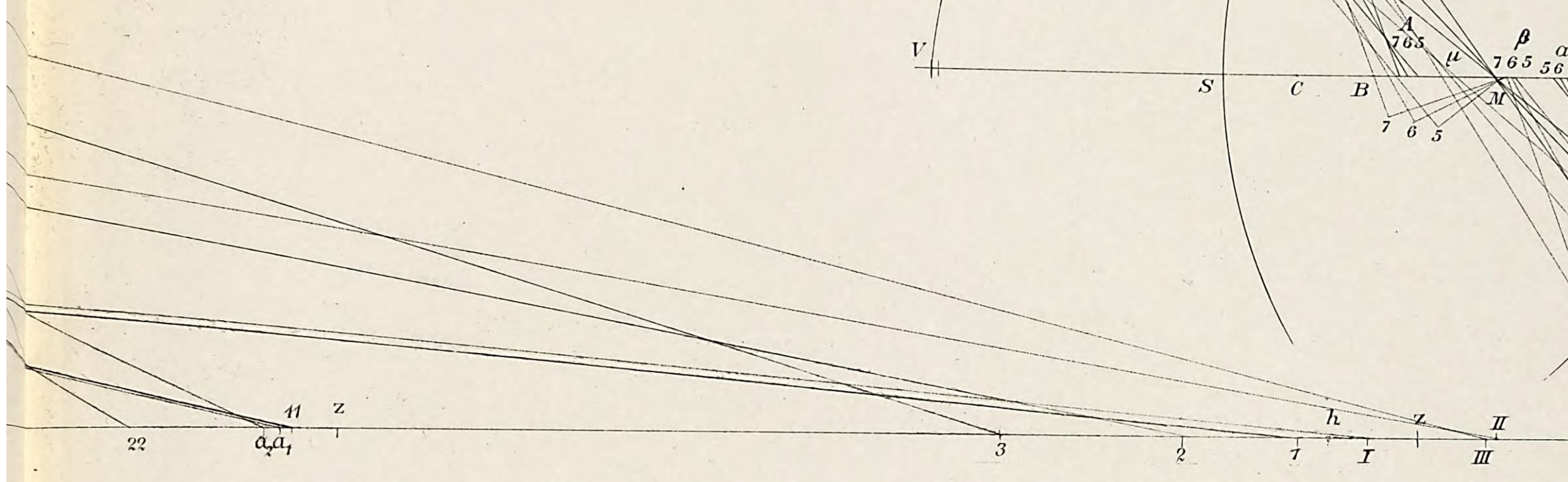


Fig. 4.

Verlag v. W. En



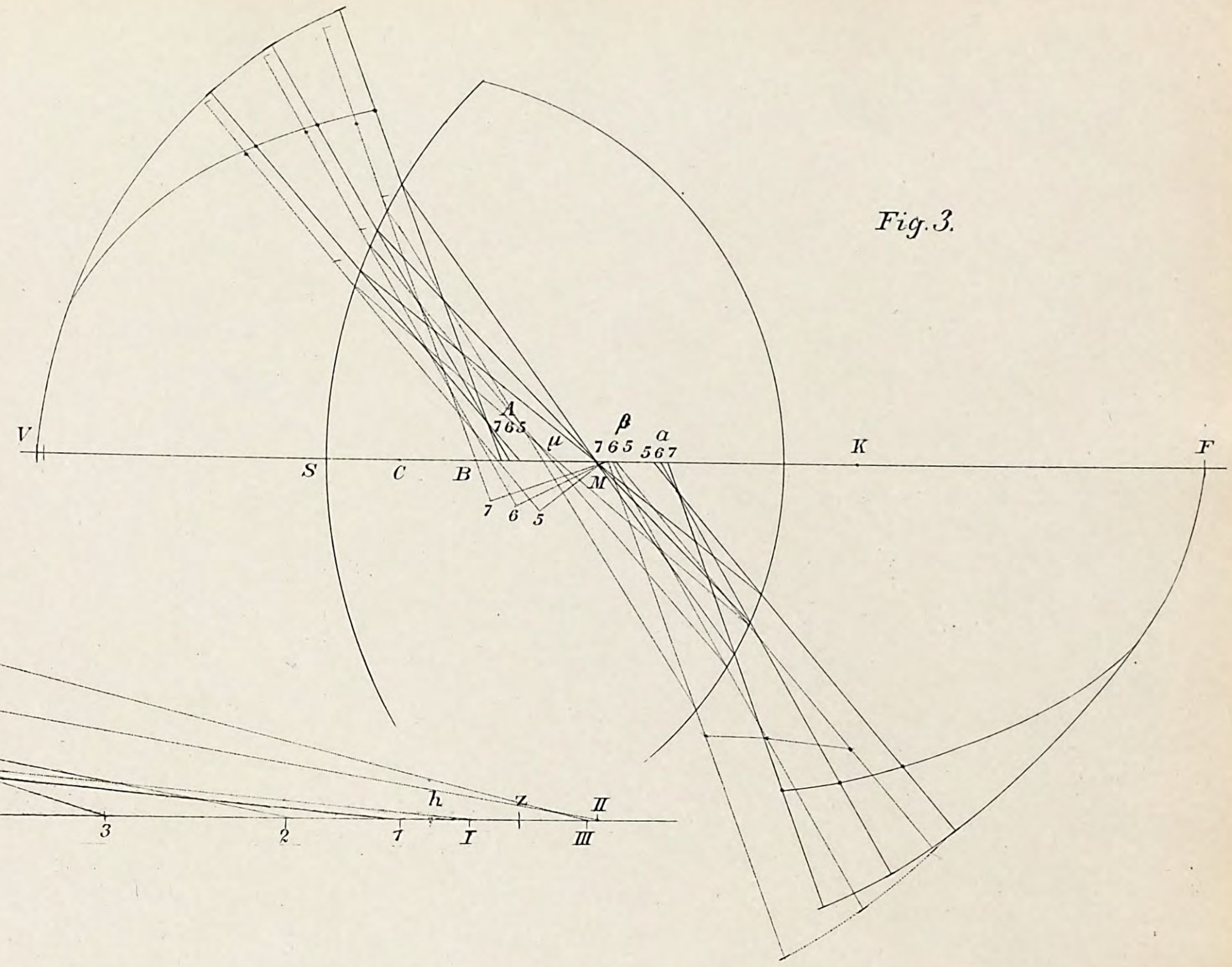


Fig. 3.

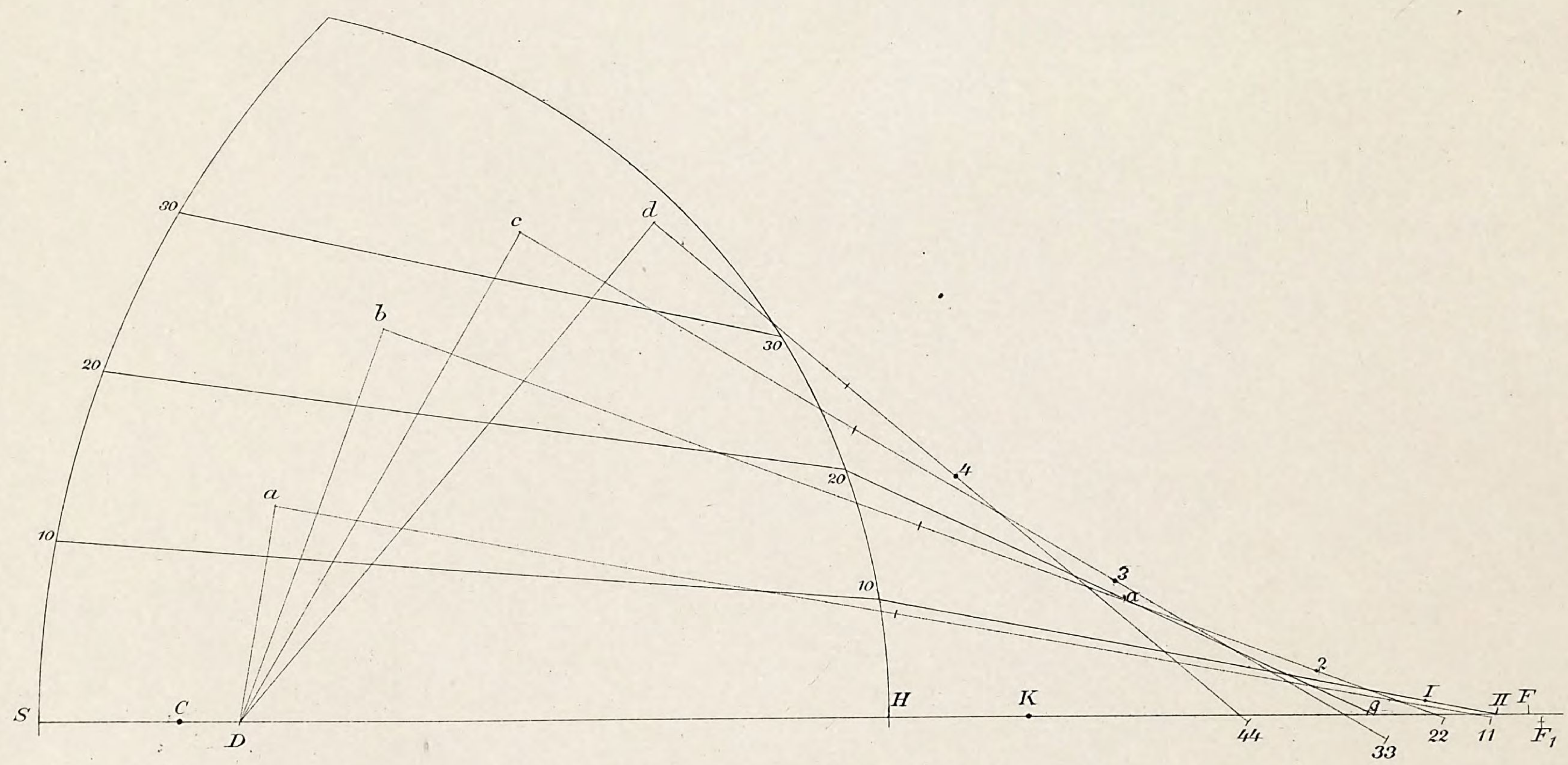


Fig. 2.

...gelmann in Leipzig.
Lith.Anst.v.E.A.Funke, Leipzig.

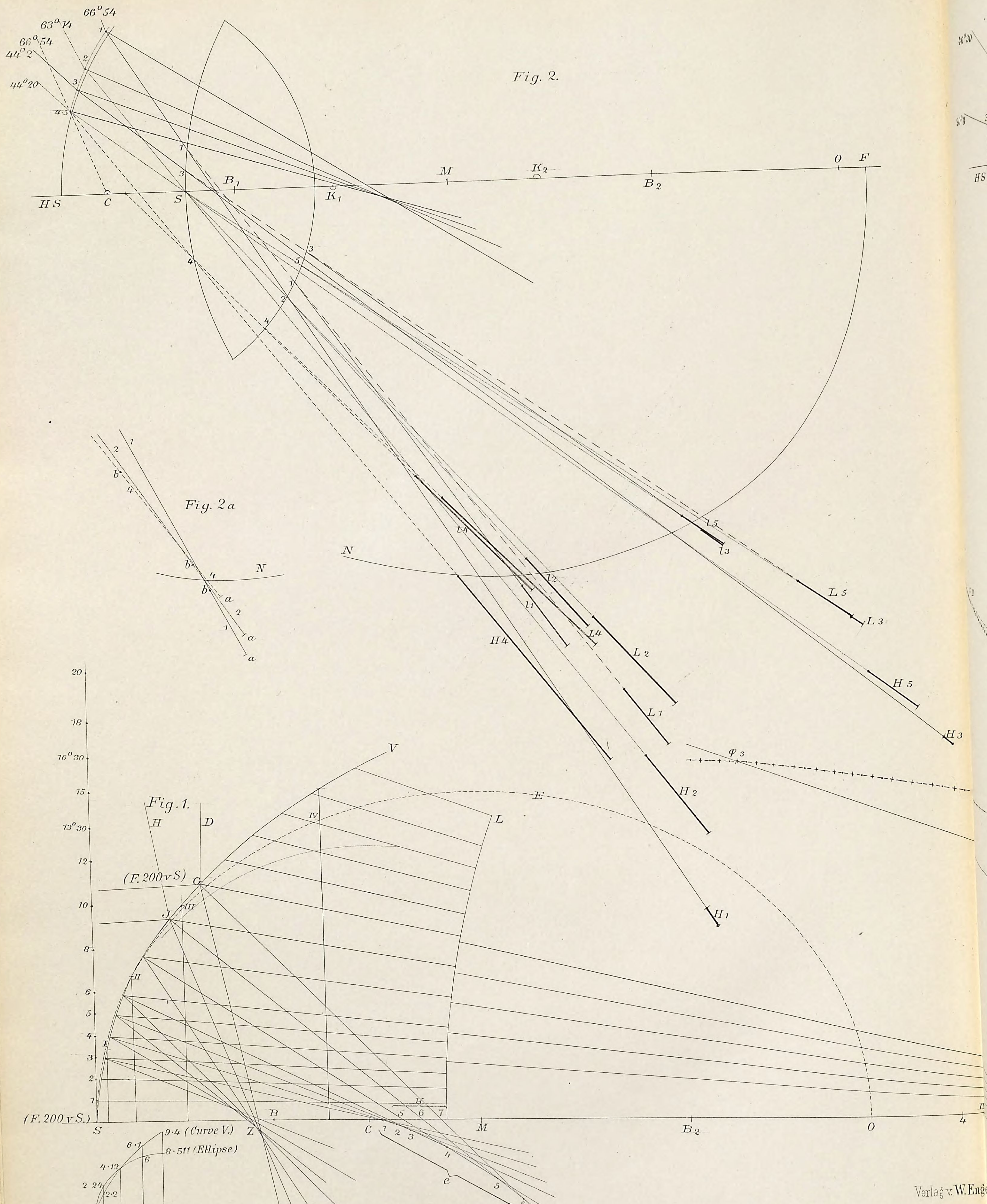
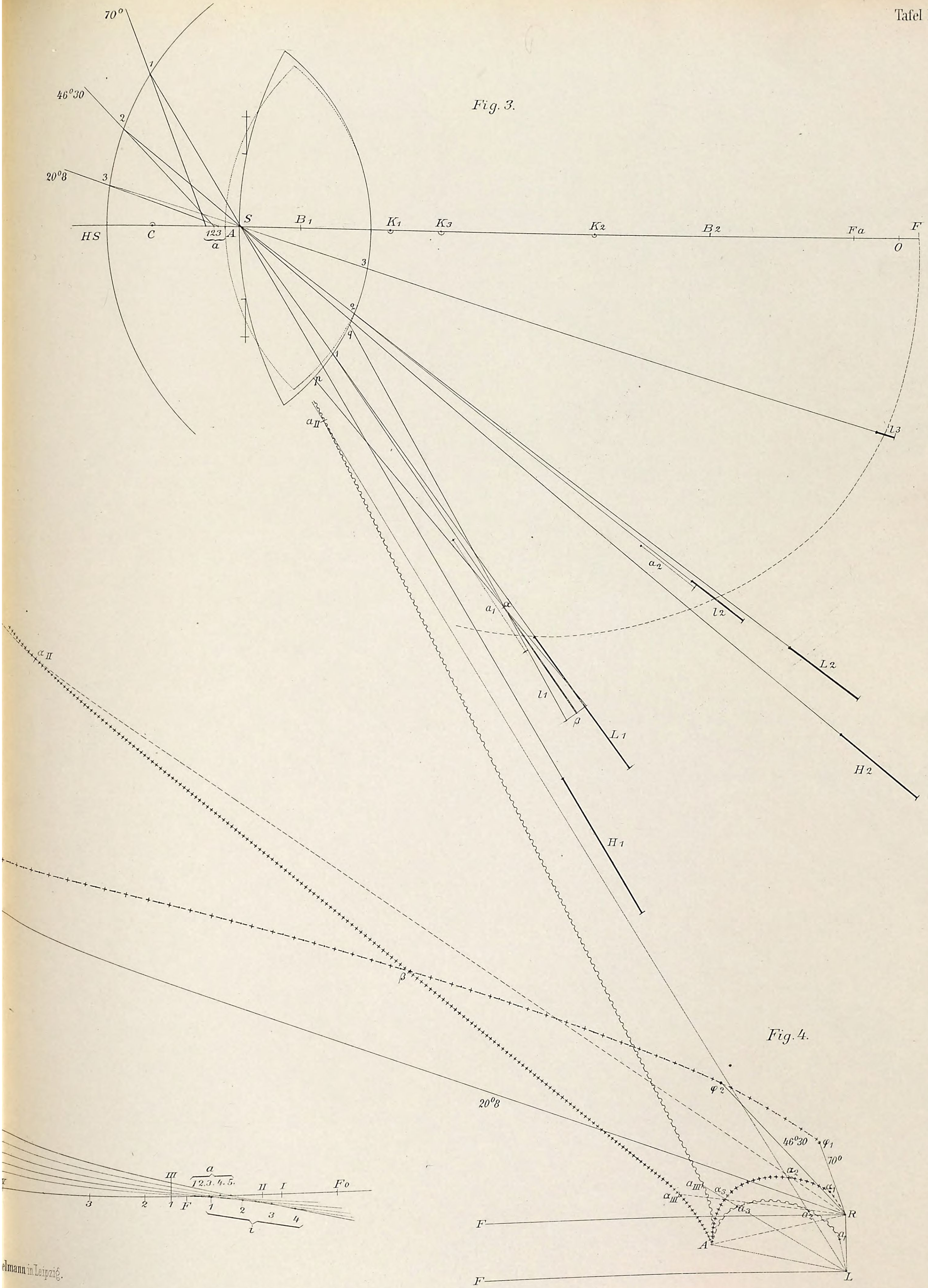

Fig. 2.
66° 54
63° 14
66° 54
44° 2
44° 20
H S
C
S
B1
K1
M
K2
B2
O
F
l5
l3
l4
l2
l1
L4
L5
L3
L2
L1
H4
H5
H3
H2
H1
N
φ 3
Fig. 2a
N
Fig. 1.
V
L
E
H
D
IV
(F. 200 v S.)
G
J
III
II
I
K
S
Z
B
C
M
B2
O
9·4 (Curve V.)
8·511 (Ellipse)
6·1
4·12
2·24
2·2
e

Fig. 3.

Fig. 4.



...elmann in Leipzig.

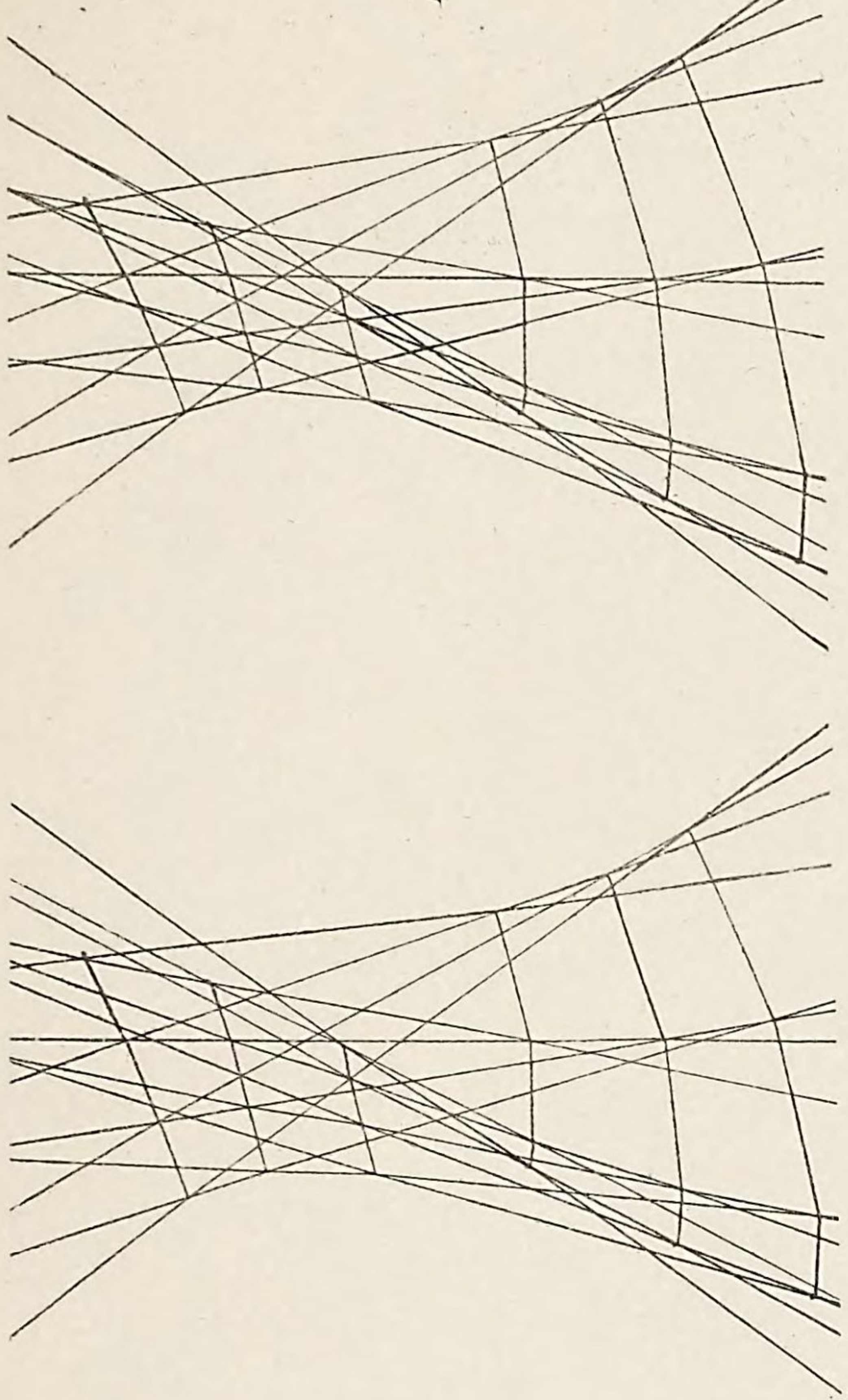


Fig. 1.

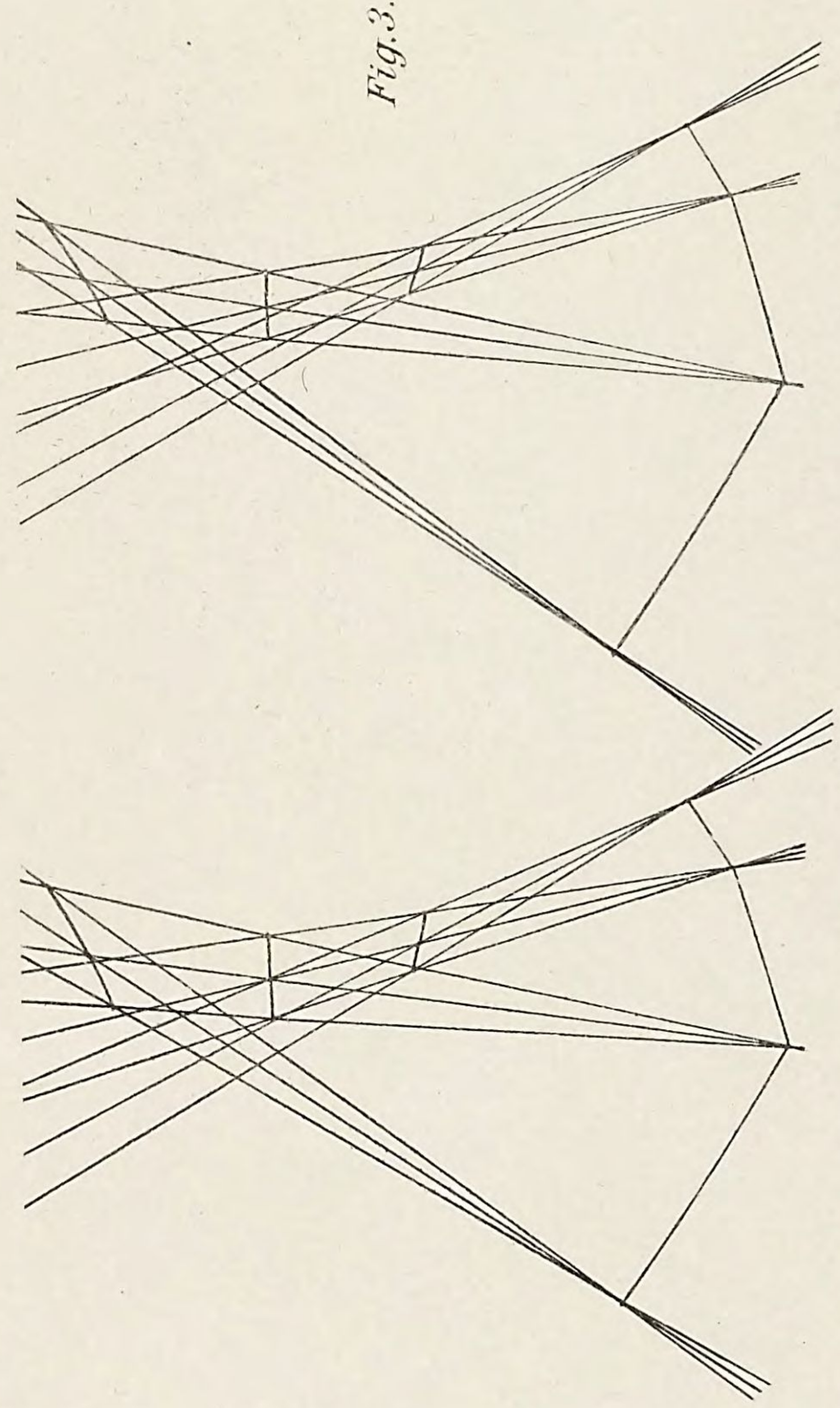


Fig. 3.

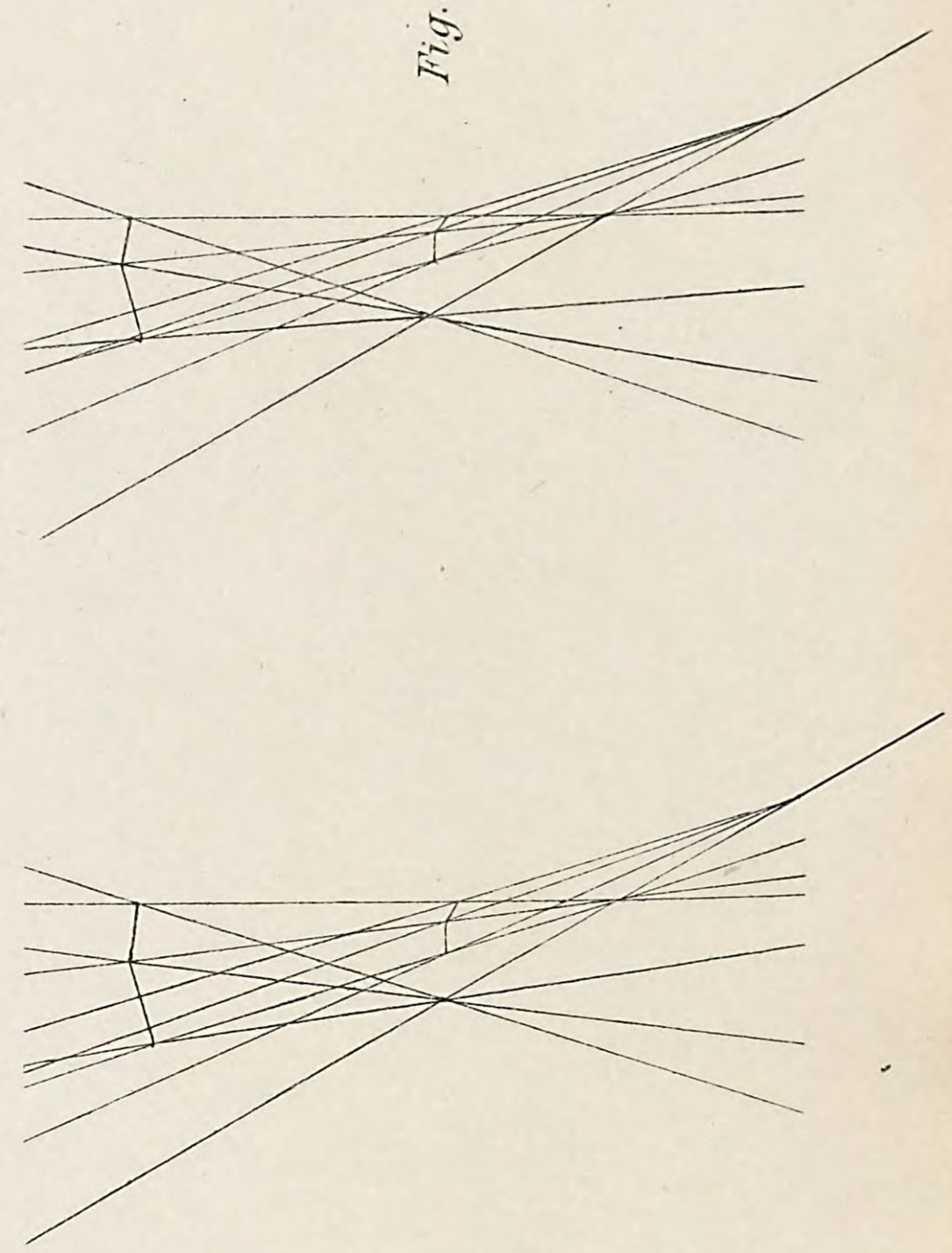


Fig. 5.

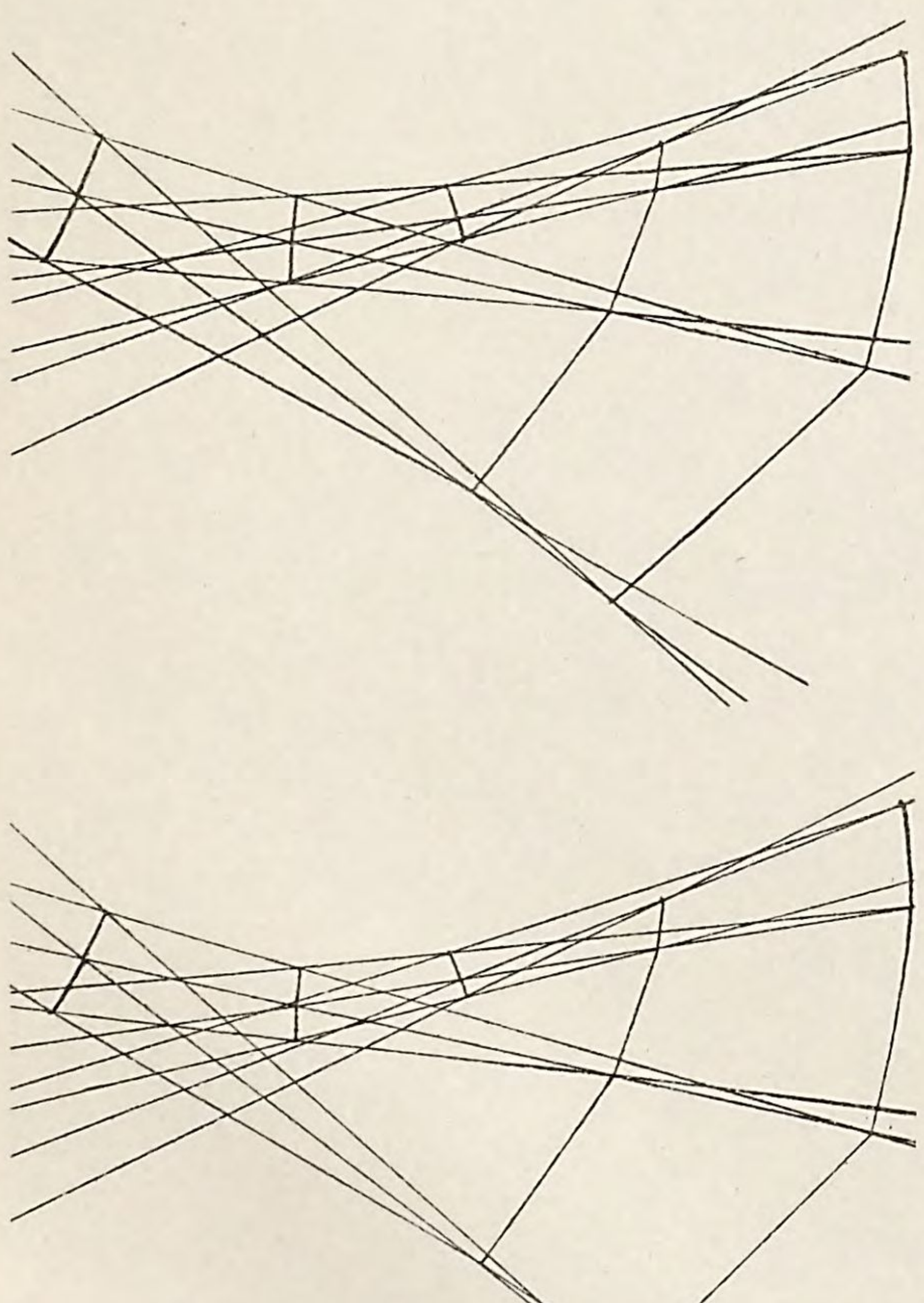


Fig. 2.

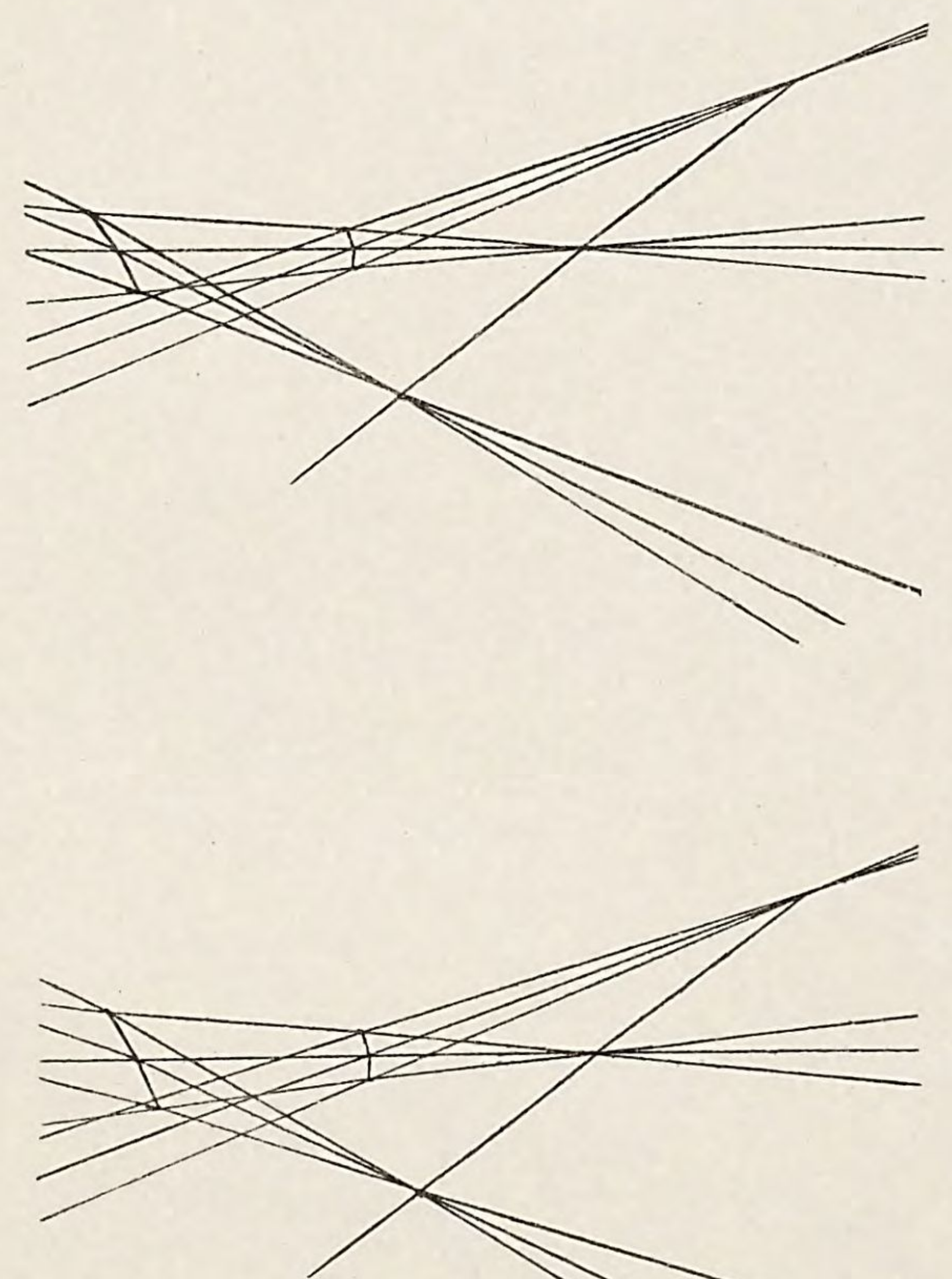


Fig. 4.

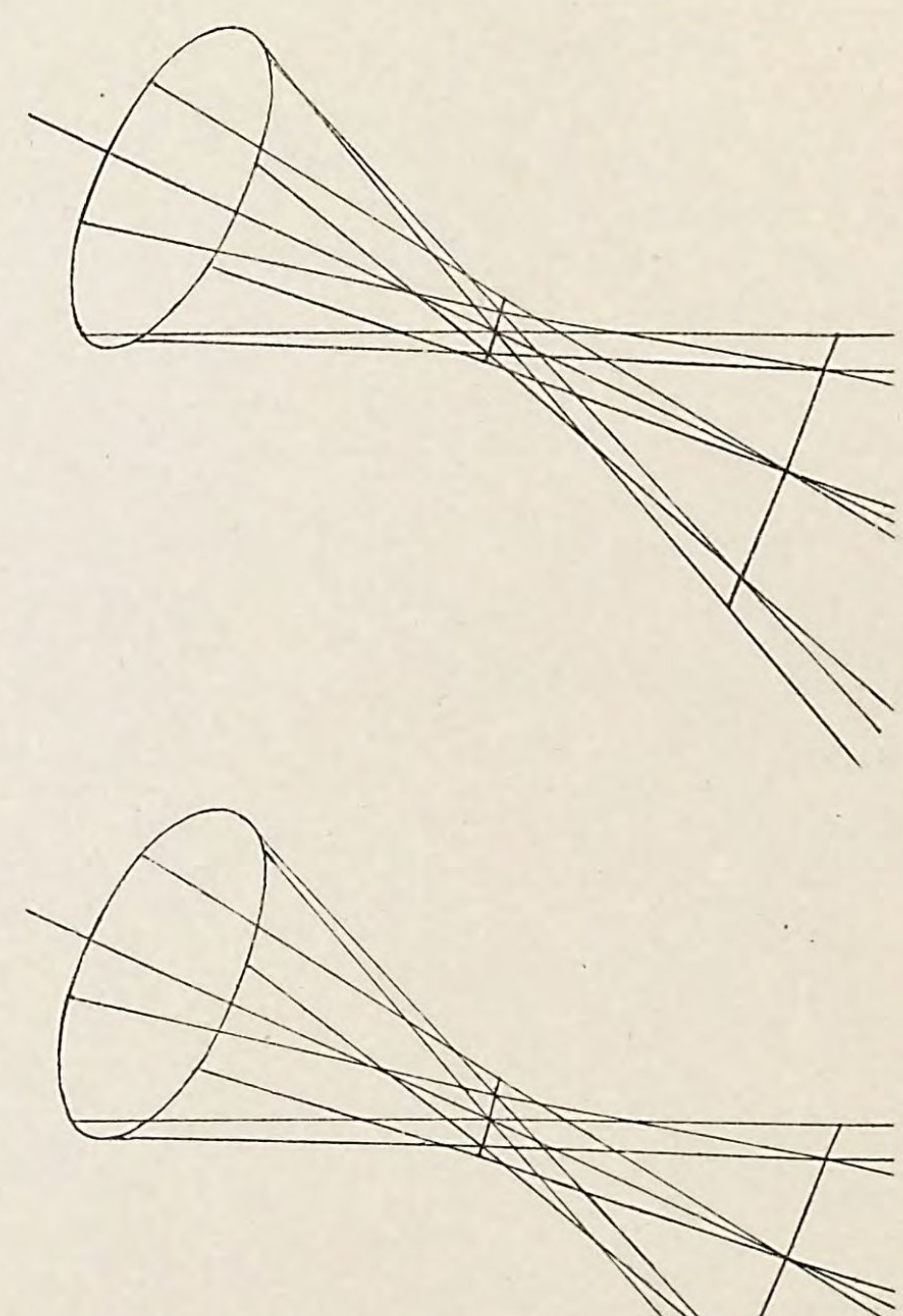
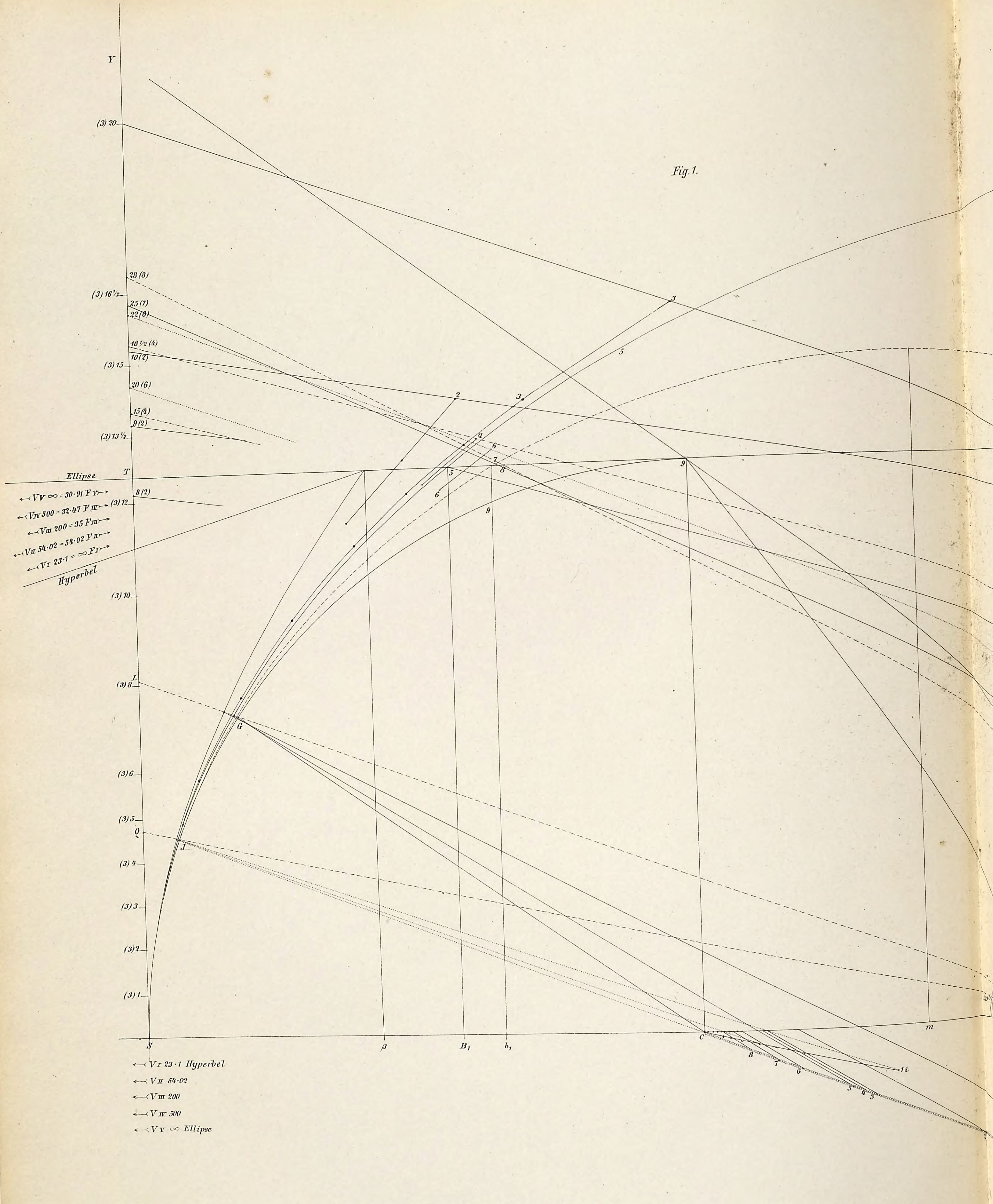


Fig. 6.

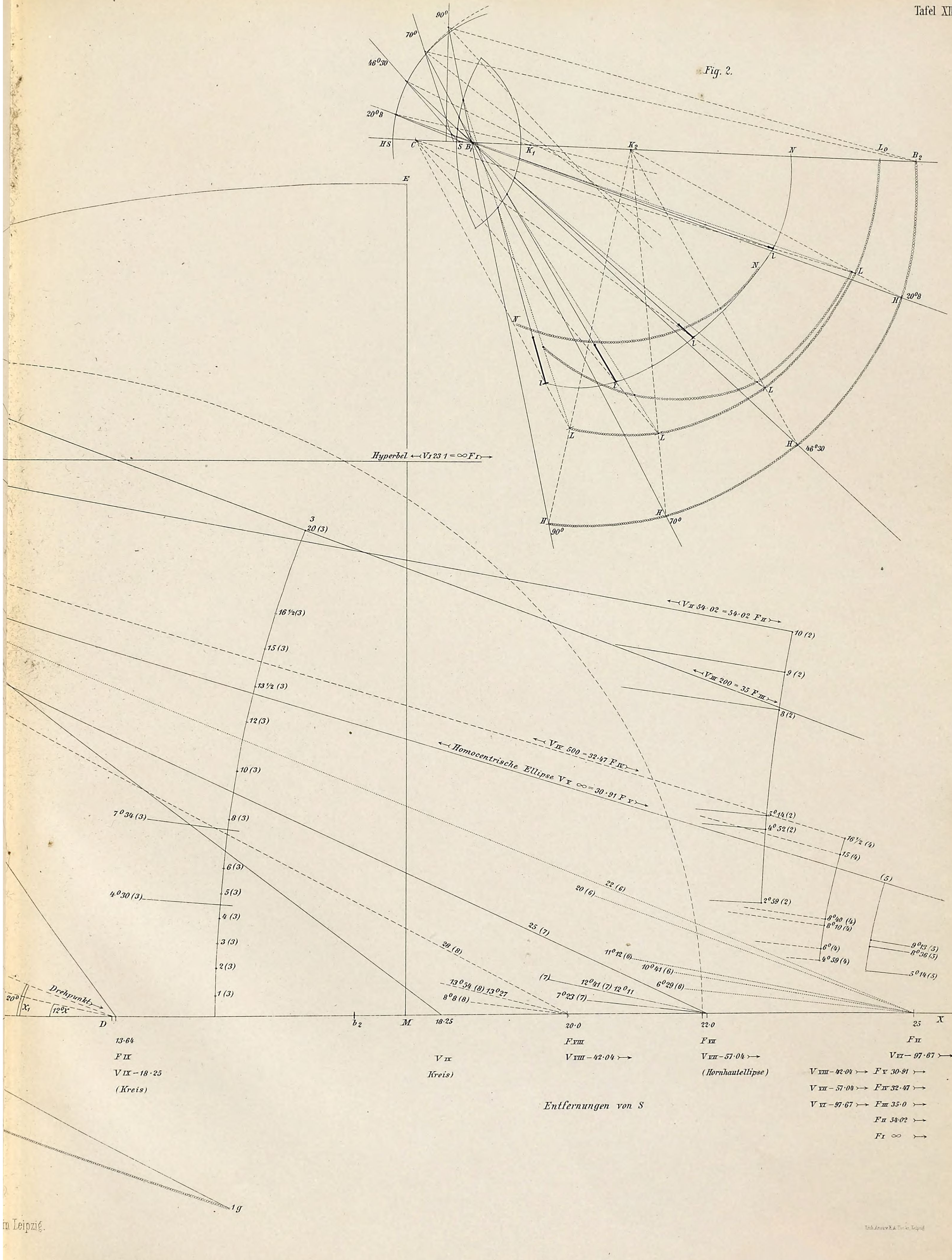
Photolith. v. Charles Stulders, Leipzig.

Verlag v. W. Engelmann in Leipzig.

Druck v. E. A. Funke, Leipzig.



Verlag v. W. Engelmann


Fig. 2.
90°
70°
46°30
20°8
HS
C
S
B
K1
K2
N
Lo
B2
E
l
L
H
20°8
N
L
l
L
L
L
L
H
46°30
H
70°
H
90°
Hyperbel ←VI 23 1 = ∞ FI→
3
20 (3)
16 ½ (3)
15 (3)
13 ½ (3)
12 (3)
10 (3)
8 (3)
7°34 (3)
6 (3)
5 (3)
4°30 (3)
4 (3)
3 (3)
2 (3)
1 (3)
←VII 54·02 = 54·02 FII→
10 (2)
9 (2)
←VIII 200 = 35 FIII→
8 (2)
←VIV 500 = 32·47 FIV→
←Homocentrische Ellipse VV ∞ = 30·91 FV→
5°14 (2)
4°52 (2)
2°59 (2)
16 ½ (4)
15 (4)
(5)
8°40 (4)
8°10 (4)
6° (4)
4°59 (4)
9°13 (5)
8°36 (5)
5°14 (5)
22 (6)
20 (6)
25 (7)
29 (8)
11°12 (6)
10°41 (6)
6°29 (6)
(7)
12°41 (7) 12°11
7°23 (7)
13°54 (8) 13°27
8°8 (8)
Drehpunkt
20°
X1
12°X
D
b2
M
18·25
20·0
22·0
25
X
13·64
FIX
VIX – 18·25
(Kreis)
VIX
Kreis)
FVIII
VVIII – 42·04 →
FVII
VVII – 57·04 →
(Hornhautellipse)
FII
VVI – 97·67 →
VVIII – 42·04 → FV 30·91 →
VVII – 57·04 → FIV 32·47 →
VVI – 97·67 → FIII 35·0 →
FII 54·02 →
FI ∞ →
Entfernungen von S
1g

in Leipzig.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schoen, Wilhelm

Beiträge zur Dioptrik des Auges

Leipzig 1884

2 Math.a. 86 w
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11460698-9